

Translationer

Mån Lv 5

symmetri $\leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Noethers} \\ \text{teorem} \end{array} \right\} \rightarrow$ Bevarad storhet

- Tidsinvarians

- Energi $\hat{H}$

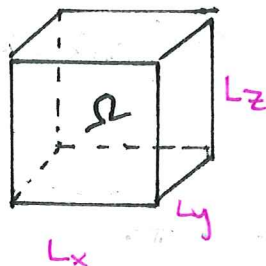
- Rotationer

- Rörelsemängdsmoment $\hat{S}$

- Translationer

- Rörelsemängd $\hat{P}$

För enkelhetens skull, betrakta en kuben!



$$V = L_x L_y L_z$$

med periodiska villkor!

Fysikaliska tillstånd kan translateras i rummet men translationer med en multipl av sidlängden ger tillbaka samma tillstånd.

Hur verkar en translation på $\Delta \mathbf{r}$ på tillståndsrum $\hat{H}$?

→ skall finnas en unitär operator

vektor i vanliga rummet

$$\hat{U}_{\Delta \mathbf{r}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{P}}\right)$$

$$\text{Om } \Delta \mathbf{r} = n_x L_x \mathbf{i} + n_y L_y \mathbf{j} + n_z L_z \mathbf{k}$$

godtyckliga
heltal

Så skall vi ha $\hat{U}_{\Delta \mathbf{r}} = \hat{I} =$ enhetsoperatoren

Detta ger ett villkor på tänkbara egenvärden för komponenterna av rörelsemängden $\hat{P} = \hat{P}_x \hat{i} + \hat{P}_y \hat{j} + \hat{P}_z \hat{k}$

Måste ha
$$\begin{cases} P_x = 2\pi\hbar \frac{l_x}{L_x} \\ P_y = 2\pi\hbar \frac{l_y}{L_y} \\ P_z = 2\pi\hbar \frac{l_z}{L_z} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} l_x - \text{heltal} \\ l_y - \text{heltal} \\ l_z - \text{heltal} \end{array} \right\}$$

(*)

Så att $\frac{i}{\hbar} \nabla \cdot \hat{p} = \text{multipel av } 2\pi i$ så att $\hat{U}_{or} = \hat{I}$

~~Rörelsemängden kan bara ha alltså bara~~

Rörelsemängden är alltså kvantiserad (kan bara anta vissa diskreta värden!)

Tillståndsrummet $\mathcal{H}$ för något system (en partikel instängd i lådan) kan delas upp enligt

$$\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_P$$

här P

~~T.ex. om $\psi \in \mathcal{H}_P$ för ngt värde~~

T.ex. om $\psi \in \mathcal{H}_P$ för ngt valt värde på

$$\hat{P}_x \psi = P_x \psi$$

egentillst.
egen-
värdet

Hur ser underrummen $\mathcal{H}_p$ ut?

Enklaste fallet är $\dim \mathcal{H}_p = 1$ för varje tillåtet värde på p (spinnlös partikel utan frihetsgrad)

Antag $\hat{p}_x \psi = p_x \psi$

Då är $\hat{U}_{\Delta r} \psi = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta r \cdot \hat{p}\right) \psi$

$$= \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} \Delta r \hat{p}\right)^n \psi$$

$$= \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} \Delta r p\right)^n \psi$$

$$= \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta r p\right) \psi = 1 \cdot \psi = \psi$$

Låt ψ_p vara ett normerat bas element för $\mathcal{H}_p$

Ett godtyckligt element ψ i $\mathcal{H}$ kan då entydigt skrivas

$$\psi = \sum_p c_p \psi_p \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{summan alltid över} \\ \text{tillåtna värden på } p \text{ enl. (*)} \end{array} \right\}$$

komplex koef.

Men $\psi' = \sum c'_p \psi_p$ har skalärprod.

$$\langle \psi | \psi' \rangle = \sum_p \overline{c_p} c'_p \quad \text{ty} \quad \langle \psi_p | \psi'_p \rangle = \delta_{pp'}$$

All info. om tillståndet $\psi \in \mathcal{H}$ ligger i koef. c_p

Använd dessa koef. för att def. en vågfunktion $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$

annat ψ ! vågrummet

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{\mathbf{p}} C_{\mathbf{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}\right)$$

ortsvektor i vanliga rummet

Omvänt har vi

$$C_{\mathbf{p}} = \frac{1}{V^{1/2}} \int_{\Omega} d^3 \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}\right) \quad (\#)$$

vi har identifierat:

~~Skall nu visa att man kan identifiera~~

$$\mathcal{H} = \left\{ \text{komplexvärda periodiska funktioner} \right\}$$

tillståndsrummet

Skalarprod. mellan två tillstånd är enligt ovan

$$\langle \psi | \psi' \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \overline{C_{\mathbf{p}}} C'_{\mathbf{p}}$$

Sätt nu in $C_{\mathbf{p}}, C'_{\mathbf{p}}$ enligt (#)

$$= \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{V^{1/2}} \int_{\Omega} d^3 \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) \cdot \frac{1}{V^{1/2}} \int_{\Omega} d^3 \mathbf{r}' \psi'(\mathbf{r}') \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'\right)$$

$$= \int_{\Omega} d^3 \mathbf{r} \overline{\psi(\mathbf{r})} \psi'(\mathbf{r})$$

$$\langle \psi | \psi' \rangle = \int d^3 \mathbf{r} \overline{\psi(\mathbf{r})} \psi'(\mathbf{r})$$

Alltså:

$$\text{Tillstånd } \Psi = \sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}$$

— baserlement i Ψ
— komplex koef.

svarar mot vågfunktion med funktionsvärde

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}\right)$$

Baserlement $\Psi_{\mathbf{p}}$ är egentillstånd till rörelsemängdsoperatoren

Hur fungerar rörelsemängdsoperatoren $\hat{\mathbf{p}} = p_x \hat{\mathbf{i}} + p_y \hat{\mathbf{j}} + p_z \hat{\mathbf{k}}$ på vågfunktioner?

På tillståndet Ψ verkar den enligt

$$\begin{aligned} \hat{p}_x \Psi &= p_x \sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}} \\ &= \sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} p_x \Psi_{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

— egentillstånd
— egenvärde

OSV.

Linjärkombinationen $\sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} p_x \Psi_{\mathbf{p}}$ av baserlement svarar mot funktionen

$$\sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} p_x \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}\right)$$

men detta är lika med $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi$

Så när operatoren $\hat{p}_x$ verkar på en vågfunktion fungerar den som $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Ta med alla tre komponenterna:

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla$$

Hur fungerar en translation?

$$\hat{U}_{\Delta r} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta r \hat{p}\right)$$

Låt den verka på en vågfunktion ψ .

$$(\hat{U}_{\Delta r} \psi)(r) = \left(\exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta r \hat{p}\right) \psi\right)(r) \quad \text{förskjutning}$$

$$= \left(\exp(\Delta r \cdot \nabla) \psi\right)(r) \quad \text{gradient}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta r \cdot \nabla)^n \psi\right)(r)$$

$$= \left(1 + \Delta r \cdot \nabla + \frac{1}{2} (\Delta r \cdot \nabla)^2 + \dots\right) \psi(r)$$

$$= \psi(r) + \Delta r (\nabla \cdot \psi)(r) + \dots$$

Taylor's formel!

$$= \psi(r + \Delta r)$$

Så $\hat{U}_{\Delta r}$ utför verkligen en translation!

$$\text{Tillstånd } \psi = \sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}$$

$$\text{Normerat } \langle \psi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r |\psi(r)|^2 = 1$$

sannlikhetstäthet för att
påträffa partikeln i närheten
av läget med Ortsvektor r

$c_{\mathbf{p}}$ - sannlikhetsamplitud för resultat $\mathbf{p}$ vid mätning av
rörelsemängd

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{\mathbf{p}} |c_{\mathbf{p}}|^2 = 1$$

Om $\hat{p} = -i\hbar \nabla$, hur ser egentillstånden ψ_p ut?

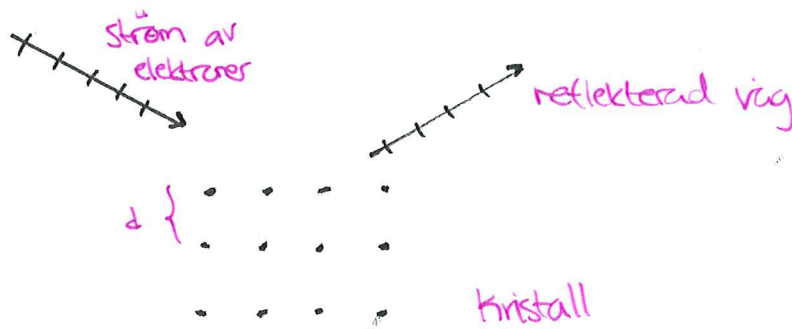
↳ ψ_p svarar mot vågfunktionen $\exp(\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = \psi_p$

$$\begin{aligned}\text{kontroll: } \hat{p} \psi_p &= -i\hbar \nabla \exp(\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \\ &= -i\hbar \cdot \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \exp(\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \\ &= \mathbf{p} \cdot \psi_p\end{aligned}$$

Fysikaliskt: partiken med rörelsemängd $\mathbf{p}$ svarar mot periodisk vågfunktion $\exp(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ (planvåg) med våglängd $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{|\mathbf{p}|}$

de Broglie vågor

Experimentell detektion (bild s. 108)



Konstruktiv eller destruktiv interferens i olika riktningar!

