Mån LV4

Obs! Inlupp. 2 $\rightarrow$ Mån 30/9 !

Inför uppg. 5.16:

vanliga tal A, B uppfyller $AB \equiv BA$

samt $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$

Operatorer $\hat{A}, \hat{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

har i allmänhet $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

och $\exp(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\hat{A})^n$ uppfyller $\exp(\hat{A})\exp(\hat{B}) \neq \exp(\hat{A}+\hat{B})$

$\rightarrow$ vi definierar Kommutatorn: $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

som beskr. skillnaden vid multiplikation i olika ordning

$[\hat{A}, \hat{B}]$ är också en operator $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

I allmänhet kommuterar <u>inte</u> $[\hat{A}, \hat{B}]$ med $\hat{A}, \hat{B}$

5.16: Vi antar att $[\hat{A}, \hat{B}]$ faktiskt kommuterar med $\hat{A}, \hat{B}$ s.a. $\left[\hat{A}[\hat{A},\hat{B}]\right] = \left[\hat{B}[\hat{A},\hat{B}]\right] = 0$

Då gäller en förenklad version av Campbell-Baker-Hausdorff (CBH) formeln: $\exp(\hat{A})\exp(\hat{B}) = \exp\left(\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]\right)$

a) Kontrollera detta till 3e ordn. i $\hat{A}$ och $\hat{B}$ ("inte svår")

b) Visa detta exakt! (svår!)

Sammanflätning (entanglement)

Fysikaliskt system S som består av två delar $S^{(1)}$ och $S^{(2)}$ (som inte behöver växelverka med varandra!)

Frågeställning: Hur beskrivs detta i kvantfysiken?

Det finns tillståndsrum, $\mathcal{H}, \mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}$ för helheten och delarna.
Alla dessa är linjära rum över $\mathbb{C}$.

Relation:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$$ tensorprodukt av $\mathcal{H}^{(1)}$ och $\mathcal{H}^{(2)}$

Detta beskrivs genom ON-baser;

låt $\chi_1^{(1)}, \dots, \chi_D^{(1)}$ vara en ON-bas för $\mathcal{H}^{(1)}$, $\{\dim \mathcal{H}^{(1)} = D_1\}$

" $\chi_1^{(2)}, \dots, \chi_D^{(2)}$ —— " —— $\mathcal{H}^{(2)}$, $\{\dim \mathcal{H}^{(2)} = D_2\}$

Då är $D = \dim \mathcal{H} = D_1 \cdot D_2$ och kan alltså införa en ON-bas för $\mathcal{H}$. med element som betecknas

$$\chi_i^{(1)} \otimes \chi_j^{(2)} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, D_1 \\ j = 1, \dots, D_2 \end{array}$$

Ett godtyckligt element i $\mathcal{H}$ fås genom linjärkombination:

$$\psi = c_{11}\, \chi_1^{(1)} \otimes \chi_1^{(2)} + \dots + c_{1D_2}\, \chi_{D_2}^{(1)} \otimes$$

$$\vdots$$

$$c_{D_1 1}\, \chi_{D_1}^{(1)} \otimes \chi_1^{(2)} + \dots + c_{D_1 D_2}\, \chi_{D_1}^{(1)} \otimes \chi_{D_2}^{(2)}$$

godtyck. komplex. koeff.

Vissa element i $\mathcal{H}$ är produkttillstånd,

dvs de kan skrivas på formen $\psi = \psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)}$

$\in \mathcal{H}$ $\in \mathcal{H}^{(1)}$ $\in \mathcal{H}^{(2)}$

$$\left.\begin{aligned} \psi^{(1)} &= c_1^{(1)} \chi_1^{(1)} + \ldots + c_{D_1}^{(1)} \chi_{D_1}^{(1)} \\ \psi^{(2)} &= c_1^{(2)} \chi_1^{(2)} + \ldots + c_{D_2}^{(2)} \chi_{D_2}^{(2)} \end{aligned}\right\} \rightarrow \psi = c_1^{(1)} c_1^{(2)} \chi_1^{(1)} \otimes \chi_1^{(2)} + \ldots$$

Baselementen $\chi_i^{(1)} \otimes \chi_j^{(2)}$ är uppenbarligen produkttillstånd

Men ett allmänt tillstånd är en linjär kombination som inte kan skrivas som en produkt.

$\hookrightarrow$ detta kallas för ett sammanflätat tillstånd

Sammanflätade tillstånd har ingen klassisk motsvarighet!

Delsystem ett: en katt med ON-bas $|😺\rangle$, $|😵\rangle$

lever   död

$\dim \mathcal{H}^{(1)} = D_1 = 2$

Allmänt tillstånd $|\psi^{(1)}\rangle = c_{\text{levande}} |😺\rangle + c_{\text{död}} |😵\rangle$

Delsystem två: en djurvänt med ON bas $|☺\rangle$, $|☹\rangle$

glad   ledsen

$\dim \mathcal{H}^{(2)} = D_2 = 2$

Sammansatta systemet kan t.ex. befinna sig i sammanflätat tillstånd

$$|\psi\rangle = \left[|😺\rangle \otimes |☺\rangle + |😵\rangle \otimes |☹\rangle \right] \frac{1}{\sqrt{2}}$$

normerat!

Varken katt el. djurvän är i något väldefinierat tillstånd i respektive tillståndsrum.

Men det totala systemet är i ett väldefinierat sammanflätat tillstånd.

Hur fungerar operatorer $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ då $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$?

(1) Fysikaliskt storlek A som är additiv, dvs dess värde för hela systemet är summan av värdena för delsystem ~~inte~~ ~~växelverkar~~ (ex. energi, om delsystemen inte växelverkar med varandra)

Motsvarande operatorer för delsystemen betecknas $\hat{A}^{(1)} : \mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(1)}$, $\hat{A}^{(2)} : \mathcal{H}^{(2)} \to \mathcal{H}^{(2)}$

operator för hela systemet $\hat{A} = \hat{A}^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)} + I^{(1)} \otimes \hat{A}^{(2)} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

verkan på ett produkttillstånd $\psi = \psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)}$ är

$$\hat{A}\psi = \left(\hat{A}^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)} + \hat{I}^{(1)} \otimes \hat{A}^{(2)}\right) \psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)}$$

$$= \hat{A}^{(1)}\psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)} + \psi^{(1)} \otimes \hat{A}^{(2)}\psi^{(2)}$$

(2) Symmetritransformation

En viss symmetritransformation beskrivs av unitära operatorer

$$\begin{cases} \hat{U}^{(1)} : \mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(1)} \\ \hat{U}^{(2)} : \mathcal{H}^{(2)} \to \mathcal{H}^{(2)} \end{cases}$$

Motsvarande operatorer på det sammansatta systemet är

$$\hat{U} = \hat{U}^{(1)} \otimes \hat{U}^{(2)} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

$$\hat{U}\psi = \left(\hat{U}^{(1)} \otimes \hat{U}^{(2)}\right) \psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)} = \hat{U}^{(1)}\psi^{(1)} \otimes \hat{U}^{(2)}\psi^{(2)}$$

Verkan av $\hat{A}$ och $\hat{U}$ på godtyckliga (sammanflätade) tillstånd följer från linjäritet

t.ex. $\hat{U}(c\psi + c'\psi') = c\hat{U}\psi + c'\hat{U}\psi'$

Tankeexperiment i kap 2:

$\rightarrow$ Partiklarna är sammanflätade!

Ex. Två fotoner längs z-axeln

ON-bas $\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}$ polarisation längs x- resp. y-axeln för foton 1

$\chi_1^{(2)}, \chi_2^{(2)}$ pol. längs — " — " — " — för foton 2

ON-bas för hela systemet $\chi_1^{(1)} \otimes \chi_1^{(2)}, \chi_1^{(1)} \otimes \chi_2^{(2)}, \chi_2^{(1)} \otimes \chi_1^{(2)}, \chi_2^{(1)} \otimes \chi_2^{(2)}$ (*)

Rotation vinkel θ kring z-axeln motsvaras av operatorer $\hat{U}^{(1)}_{\theta k}, \hat{U}^{(2)}_{\theta k}$ med matriser $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ map. resp. bas.

Operator för hela systemet $\hat{U}_{\theta IK} = \hat{U}^{(1)}_{\theta IK} \otimes \hat{U}^{(2)}_{\theta IK}$

med matris $\begin{pmatrix} \text{komplicerad} \\ \text{4x4 matris} \end{pmatrix}$ (6.18) map basen (*)

Byt till en annan ON-bas för $\mathcal{H}$ med element

$$\chi_{-2} = \frac{1}{2}\left(\chi_1^{(1)} \otimes \chi_1^{(2)} - i\chi_1^{(1)} \otimes \chi_2^{(2)} - i\chi_2^{(1)} \otimes \chi_1^{(2)} - \chi_2^{(1)} \otimes \chi_2^{(2)}\right)$$

χ_{+2}

χ_0^s osv. (6.19) $\Bigg\}$ kolla själv att detta är ON-bas för $\mathcal{H}$

χ_0^a

Matrisen för operatorn $\hat{U} = \hat{U}^{(1)} \otimes \hat{U}^{(2)}$ map denna bas

är mkt enklare:

$$\begin{bmatrix} e^{-2i\theta} & & & \\ & e^{+2i\theta} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Detta betyder att χ_0^s, χ_0^a är invarianta under rotation!
medan $\chi_{\pm 2}$ transformerar till $e^{\pm 2i\theta}\chi_{\pm 2}$ under en rot.
med vinkel θ.

Fotonparet i tankeexperimentet skickas ut i det sammanflätade tillståndet

$$\underbrace{|\chi_0^s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{normering}}\left(\underbrace{|\chi_1^{(1)}\rangle \otimes |\chi_1^{(2)}\rangle}_{\text{polaris. längs } x} + \underbrace{|\chi_2^{(1)}\rangle \otimes |\chi_2^{(2)}\rangle}_{\text{polar. längs } y}\right)$$

Ex. Två elektronspinn:

ON-baser $\chi_1^{(1)} = \psi_{IK}^{\uparrow}$ resp. $\chi_1^{(2)}$

$\chi_2^{(2)} = \psi_{IK}^{\downarrow}$ $\chi_2^{(2)}$ för andra elektronen

Rotation med rot.vektor $\vec{\Omega}$ ($\Omega = |\vec{\Omega}|$ = vinkel, $\vec{\Omega}$ pekar längs rot.axel.)

verkar gnm. unitära operatorer $\hat{U}_{\vec{\Omega}}^{(1)}$, $U_{\vec{\Omega}}^{(2)}$ på $\mathcal{H}^{(1)}$ och $\mathcal{H}^{(2)}$

$\hat{U}_{\vec{\Omega}} = U_{\vec{\Omega}}^{(1)} \otimes U_{\vec{\Omega}}^{(2)}$ verkar på $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$

Fruktansvärd ~~bas~~ matris map basen ovan!

Finns ett förenklande basbyte till:

$$|\chi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_1^{(1)} \otimes \chi_2^{(2)} - \chi_2^{(1)} \otimes \chi_1^{(2)}\right)$$ Sammanflätat!

$$\left.\begin{aligned} |\chi_x\rangle &= \\ |\chi_y\rangle &= \\ |\chi_z\rangle &= \end{aligned}\right\} \text{se (6.28)}$$

används i tanke-experimentet!

$|\chi_0\rangle$ är invariant under alla rotationer $\hat{U}_{\vec{\Omega}}$

$|\chi_x\rangle, |\chi_y\rangle, |\chi_z\rangle$ - transformeras in i varandra som komponenterna av en vektor i det vanliga rummet