Observabler och symmetrier

Tors Lv3

Ponera ett komplicerat klassiskt system (planetsystemet)

→ Tillståndsvariabler (lägen, rörelsemängder)

→ Tidsutv. enligt rörelseekv. (Newton II, ...)

Omöjligt att lösa allmänt! :(

↳ variablerna ändras på ett svårbegripligt sätt med tiden

Två begrepp:

En **bevarad storhet** är en fkn. av tillståndsvariablerna vars värde inte ändras när systemet tidsutvecklas enligt rörelseekv.

Ex. (beror på systemet, men fungerar på planetsystemet)

- Energi
- Rörelsemängd
- Rörelsemängdsmoment

} Bevarade storheter

En **symmetri** är en regel som ~~får~~ från en given lösning till rörelseekv. konstruerar en annan lösning till samma ekv.

{ Emmy Noether (1915): "Till varje bevarad storhet ~~symmetri~~ finns det en kontinuerlig symmetri, och vice versa!" }

Ex.

→ Tidsinvarians (senarelägg / tidigarelägg lösningen)
→ Translationsinvarians (flytta en lösning i rummet)
→ Rotationer

} symmetrier

Noethers teorem: Bevarade storheter ⇄ symmetrier

I Kvantfysiken

Tillstånds rum $\mathcal{H}$;

en (linjär) ~~avbild~~ operator är en avbildning s.a.

$$\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \psi \mapsto \hat{A}\psi \quad (\text{inte } \hat{A}(\psi)\,!)$$

som är linjär i betydelse att om $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$
så är $\hat{A}\psi = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2$

Låt $\chi_1, \dots, \chi_D$ vara en bas till $\mathcal{H}$

→ $\hat{A}$ är fullständigt bestämd av bilderna
$\hat{A}|\chi_1\rangle, \dots, \hat{A}|\chi_D\rangle$ linjäritet!

Dessa kan utv. i samma bas:

$$\underbrace{\hat{A}}_{\text{operator}}|\chi_1\rangle = \underbrace{A_{11}}_{\text{komplexa koeff.}}|\chi_1\rangle + \dots + \underbrace{A_{1D}}_{}|\chi_D\rangle$$

Alltså; $\underbrace{A_{ij}}_{\text{komplexa tal}} = \langle \chi_{ij} | \hat{A}\chi_i \rangle$ om $\chi_1, \dots, \chi_D$ är en ON-bas

A_{ij} kallas för $\hat{A}$'s matriselement map. basen $\chi_1, \dots, \chi_D$

$\hat{A}$'s matris är $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1D} \\ \vdots & \ddots & \\ A_{D1} & \dots & A_{DD} \end{pmatrix}$

Givet $\hat{A}$ inför vi dess Hermitekonjugat $\hat{A}^{\dagger} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Beskrivs bäst genom att

$$\langle \psi | \hat{A}^{\dagger} | \psi' \rangle = \langle \psi' | \hat{A}^{\dagger} | \psi \rangle \quad \forall \ \psi, \psi' \in \mathcal{H}$$

Alternativt:

$$\langle \psi | \hat{A}^{\dagger} \psi' \rangle = \langle \hat{A} \psi | \psi' \rangle$$

Obs! Dessa två formuleringar är alltså ekvivalenta!

- Operator $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
- konjugerad operator: $\hat{A}^{\dagger} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
- om $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$ så kallas den för Hermitesk
- Låt A vara en sådan storhet med operator $\hat{A}$
- $\mathcal{H}$ kan delas upp enligt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_N$ där varje delrum är ett rum av egentillstånd till $\hat{A}$ med ngt visst egenvärde $A_1, \dots, A_N$

$$\to \underbrace{\hat{A} \psi_i}_{\text{egentillstånd}} = \underbrace{A_i}_{\text{egenvärde}} \psi_i \qquad \{ \psi_i \in \mathcal{H}_i \}$$

Egenvärden svarar mot det tänkbara resultat vid en mätning av

↳ om systemet är i tillståndet $\psi = \psi_1 + \dots + \psi_N$ så är det ~~statistsk~~ statistiska förväntansvärdet av en A-mätning

$$\underbrace{E(A)}_{\text{ej komp. konj.}} = \bar{A} = \overbrace{A_1}^{\text{resultat}} \underbrace{\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle}_{\text{sannolikhet enl. Born.}} + \dots + A_N \langle \psi_N | \psi_N \rangle = \dots$$

$$E(A) = \bar{A} = A_1 \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle + \ldots + A_N \langle \psi_N | \psi_N \rangle =$$

$$= \ldots = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle$$

En operator $\hat{U}$ är unitär om $\hat{U}^{+}\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^{+} = \hat{I}$

där $\hat{I}$ är enhetsoperatorn $\left\{ \hat{I}\psi \equiv \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \right\}$

{ Alltså, en operator multipl. med dess konjugat ger enhetsoperatorn $\Rightarrow$ då är operatorn unitär! }

"kul" sätt att, givet Hermitesk operator $\hat{A}$, konstruera en unitär operator $\hat{U}$:

$$\hat{U} = \exp(i\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\hat{A})^n$$

{ kolla själv om $\hat{U}$ blir unitär! }

Teorem (Eugene Wigner)

En symmetri verkar på ett tillståndsrum $\mathcal{H}$ genom en unitär operator $\hat{U}$; $\psi \mapsto \hat{U}\psi$

ursprungligt tillstånd

transformerat tillstånd

Om symmetrin är kontinuerlig finns det (enl. Noether) en bevarad storhet A. Låt $\hat{A}$ vara motsvarande operator!

Då: $\hat{U} = \exp(i\alpha\hat{A})$

~~ett~~ reell parameter som beskriver symmetriformationens storlek

Ex. Rotationer $\longleftrightarrow$ rörelsemängdsmoment

Rotera ett system kring origo. Beskrivs gnm. rotations-vektor $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x \hat{\mathbb{i}} + \Omega_y \hat{\mathbb{j}} + \Omega_z \hat{\mathbb{k}}$

$\longrightarrow$ $\vec{\Omega}$ pekar rotationsaxelns riktning och $\Omega = |\vec{\Omega}|$ är rotationens storlek.

Motsvarande symmetrioperator skrivs

$$\hat{U}_{\vec{\Omega}} = \exp\left(i\vec{\Omega}\cdot\mathbb{J}\right) = \exp\left(i\Omega_x\hat{J}_x + i\Omega_y\hat{J}_y + i\Omega_z\hat{J}_z\right)$$

där $\mathbb{J} = \hat{J}_x\mathbb{i} + \hat{J}_y\mathbb{j} + \hat{J}_z\mathbb{k}$ $\quad \left\{\mathbb{i} \equiv \hat{\mathbb{i}},\ \mathbb{j} \equiv \hat{\mathbb{j}},\ \mathbb{k} \equiv \hat{\mathbb{k}}\right\}$

är operatorn som svarar mot den bevarade storleken rörelsemängdsmoment.

Foton längs z-axeln

$\mathcal{H}$ spänns av $|\chi_1\rangle$ = polarisation längs x-axeln
$|\chi_2\rangle$ = — " — " — y-axeln

Rotations vinkel θ kring z-axeln beskrivs av operatorn $\hat{U}_{\theta\mathbb{k}}$

Dess matris map basen χ_1, χ_2 är $\hat{U}_{\theta\mathbb{k}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Bestäm själv matrisen J_z s.a. $\hat{U}_{\theta\mathbb{k}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\theta J_z\right)$

det är ett $\hbar$

Elektronens spin

$\mathcal{H}$ spänns av χ_1, χ_2 alternativt $\psi_{\mathbb{n}}^{\uparrow}$, $\psi_{\mathbb{n}}^{\downarrow}$ för ngn "mätriktning" (enhetsvektor) $\mathbb{n}$

spinnoperatorerna $\hat{\mathbb{S}} = \hat{S}_x \mathbb{i} + \hat{S}_y \mathbb{j} + \hat{S}_z \mathbb{k}$

ist. för $\mathbb{J}$

Map basen χ_1, χ_2 har $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ så gäller

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2}\sigma_x \\ S_y &= \frac{\hbar}{2}\sigma_y \\ S_z &= \frac{\hbar}{2}\sigma_z \end{aligned}\right\}$$

för Paulimatriserna

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$