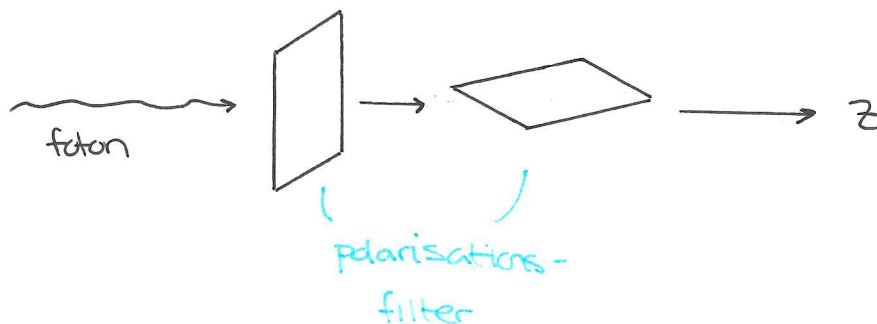


Två tvådimensionella exempel

Tors LV2

Dimension: $D = \dim \mathcal{H}$ av tillståndsrummet

En fotons polarisation



Tillståndsrum $\mathcal{H}$

Inför en (ON)-bas x_1, x_2 så. ett godtyckligt element $\psi \in \mathcal{H}$ kan entydigt skrivas enl.

$$\psi = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

komplexa koef.

obs! Finns oändligt (!) många val av sådana bas...

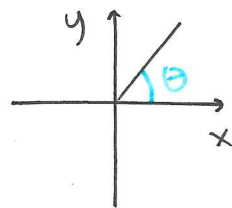
→ välj så att $\begin{cases} x_1 & \text{svårar mot polarisation längs x-axeln} \\ x_2 & \text{--- " --- " --- y-axeln} \end{cases}$

Polarisation längs en riktnig i xy-planet som bildar vinkeln θ med x-axeln svårar då mot elementet

"linjär polarisation"

$$\psi_\theta = \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2$$

element i tillst.rummet $\mathcal{H}$



figur i "vanliga rummet"

ψ_θ är ett normerat element med normen 1

~~sådan att $\langle \psi_\theta | \psi_\theta \rangle = \langle \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 | \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 \rangle$~~

~~$= \cos^2 \theta \langle x_1 | x_1 \rangle + \cos \theta \sin \theta \langle x_1 | x_2 \rangle + \sin \theta \cos \theta \langle x_2 | x_1 \rangle + \sin^2 \theta \langle x_2 | x_2 \rangle$~~

sådan att:

$$\begin{aligned}\langle \Psi_\theta | \Psi_\theta \rangle &= \langle \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 | \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 \rangle \\&= \cos^2 \theta \langle x_1 | x_1 \rangle + \cos \theta \sin \theta \langle x_1 | x_2 \rangle + \\&\quad + \sin \theta \cos \theta \langle x_2 | x_1 \rangle + \sin^2 \theta \langle x_2 | x_2 \rangle \\&= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\&= 1\end{aligned}$$

Kan kompletteras till ON-bas med

$$\Psi_{\theta + \frac{\pi}{2}} = -\sin \theta x_1 + \cos \theta x_2$$

(Kolla själv att $\langle \Psi_\theta | \Psi_{\theta + \frac{\pi}{2}} \rangle = 0$)

Mer allmänt kan koeff. c_1, c_2 väljas komplexa;
endast förhållandet $c_1 : c_2$ (på Riemann-sfären, dvs $\mathbb{C} \cup \infty$) har fysikalisk betydelse.

Allmänt:

"elliptisk
polarisation"

$$\frac{c_1}{c_2} = r e^{i\alpha}$$

$$\begin{cases} r \geq 0 \quad (\text{el. } r = \infty) \\ \alpha \text{ reell fas} \end{cases}$$

Obs! Viktigt specialfall:

$$\begin{cases} \Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + i x_2) \\ \Psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - i x_2) \end{cases}$$

höger-cirkulärt polariserat

vänster — " —

också en ON-bas!

Kontroll:

$$\begin{aligned}\langle \psi_+ | \psi_+ \rangle &= \langle \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + i x_2) | \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + i x_2) \rangle \\&= \frac{1}{2} \left[\langle x_1 | x_1 \rangle + i \cancel{\langle x_1 | x_2 \rangle} - i \cancel{\langle x_2 | x_1 \rangle} + (-i)i \langle x_2 | x_2 \rangle \right] \\&= \frac{1}{2} (1+1) \\&= 1\end{aligned}$$

{ P.S.S } $\rightarrow \langle \psi_- | \psi_- \rangle = 1$

$$\begin{aligned}\langle \psi_+ | \psi_- \rangle &= \langle \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + i x_2) | \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2 i) \rangle \\&= \frac{1}{2} \left[\langle x_1 | x_1 \rangle - i \langle x_1 | x_2 \rangle - i \langle x_2 | x_1 \rangle + (-i)(-i) \langle x_2 | x_2 \rangle \right] \\&= \frac{1}{2} (1-1) \\&= 0\end{aligned}$$

{ P.S.S } $\rightarrow \langle \psi_- | \psi_+ \rangle = 0$

Fragestellung: Vad händer vid en 'mätning' på en foton då den passerar ett filter vridet en vinkel θ relativt x-axeln?

$\hookrightarrow$ Tillståndsrummet delas upp. enl. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\theta \oplus \mathcal{H}_\theta^\perp$
där $\mathcal{H}_\theta, \mathcal{H}_\theta^\perp$ är en-dim. underrum ortogonala mot varann

$\mathcal{H}_\theta$ - fotonen passerar

$\mathcal{H}_\theta^\perp$ - fotonen stoppas

I detta fall:

$$\mathcal{H}_\theta = \{ \text{alla komplexa multiplar av } \psi_\theta \}$$

$$\hookrightarrow c\psi_\theta \in \mathcal{H}_\theta \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{H}_\theta^\perp = \{ \text{alla komplexa multiplar av } \psi_{\theta + \frac{\pi}{2}} \}$$

$$= \mathcal{H}_{\theta + \frac{\pi}{2}}$$

$$\hookrightarrow c\psi_{\theta + \frac{\pi}{2}} \in \mathcal{H}_{\theta + \frac{\pi}{2}} \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

~~Antag att fotonen passerar filtret~~

Skickar in en godtycklig foton i tillståndet $\psi = c_1\chi_1 + c_2\chi_2$
(men om filtret har vinkeln θ med x-axeln, så är
detta det bättre att skriva detta i basen $\psi_\theta, \psi_{\theta + \frac{\pi}{2}}$)

$$\psi = c\psi_\theta + c'\psi_{\theta + \frac{\pi}{2}}$$

eftersom detta svarade direkt mot $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\theta \oplus \mathcal{H}_{\theta + \frac{\pi}{2}}$

c, c' är koëff. som kan bestämmas från c_1, c_2

Borns regel säger att sannolikheten att fotonen
passerar filtret / stoppas av filtret:

$$P_{\text{pass.}} = \frac{\langle c\psi_\theta | c\psi_\theta \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{|c|^2}{1} = |c|^2$$

om ψ är normerat!

$$P_{\text{stopp.}} = \dots = |c'|^2$$

$$|c|^2 + |c'|^2 = 1 \quad \text{ty } \psi \text{ normerat!}$$

Antag att fotonen passerar

↳ Då är den därefter inte i tillståndet ψ utan i ψ_θ (fysikaliskt ekvivalent med ψ_θ)

Låt fotonen nu träffa ett nytt pol. filter med pol. riktn. θ'
Denna mätning svarar mot en annan uppdelning:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\theta'} \oplus \mathcal{H}_{\theta' + \frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\theta'} = \{\text{multipler av } \psi_{\theta'}\} \\ \mathcal{H}_{\theta' + \frac{\pi}{2}} = \{\text{multipler av } \psi_{\theta' + \frac{\pi}{2}}\} \end{cases}$$

Då:

$$\psi_\theta = \cos(\theta - \theta') \psi_{\theta'} + \sin(\theta - \theta') \psi_{\theta' + \frac{\pi}{2}}$$

Sannolikheten för att passera det andra filtret

$$P = \frac{\langle \cos(\theta - \theta') \psi_{\theta'} | \cos(\theta - \theta') \psi_{\theta'} \rangle}{\langle \psi_\theta | \psi_\theta \rangle} = \cos^2(\theta - \theta')$$

{ stämmer med empiriska resultat från kap. 2! }

En elektrons spinn

Tillståndsrummet $\mathcal{H}$ har dim. 2, ON-bas x_1, x_2

→ Kan göra en spinnprojektionsmätning med riktning

$$\mathbf{n} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

↳ enhetsvektor i vanliga rummet, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Resultatet: antingen "spinn upp" $\uparrow$ eller "spinn ner" $\downarrow$

svarar mot en uppdelning $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n^\uparrow \oplus \mathcal{H}_n^\downarrow$

$\mathcal{H}_n^\uparrow =$ komplexa multip. av $\psi_n^\uparrow$, $\mathcal{H}_n^\downarrow =$ komplexa multipler av $\psi_n^\downarrow$

Villkor för ortogonaluppdelning: $\langle \psi_n^\uparrow | \psi_n^\downarrow \rangle = 0$

Praktiskt att välja $\psi_n^\uparrow, \psi_n^\downarrow$ s.a. de utgör en ON-bas:

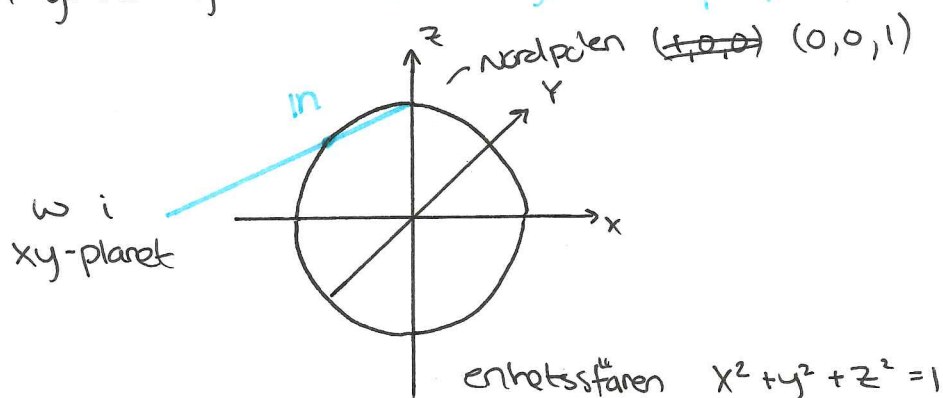
$$\langle \psi_n^\uparrow | \psi_n^\uparrow \rangle = \langle \psi_n^\downarrow | \psi_n^\downarrow \rangle = 1$$

Endast förhållandet $c_1, c_2 = \bar{w}$ spelar roll

(Obs. att $\psi_n^\uparrow = c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2$)

För varje enhetsvektor m i det vanliga rummet vill vi finna ett förhållande w på Bloch-sfären

$\hookrightarrow$ kan göras genom "stereografisk projektion"



Nordpolen $\rightarrow w = \infty$

sudpolen $\rightarrow w = 0$

Mätningen $m \rightarrow$ komplext tal $w \rightarrow$ Förhållandet c_1, c_2 i $\psi_n^\uparrow$

Villkoret att $\psi_n^\uparrow$ är normerat bestämmer det ~~sedan~~ att sedan upp till en fasfaktor $e^{i\alpha}$
Man t.ex. tar:

$$\psi_n^\uparrow = \frac{x-iy}{\sqrt{2(1-z)}} x_1 + \sqrt{\frac{1-z}{2}} x_2$$

$$\psi_n^\downarrow = \sqrt{\frac{1-z}{2}} x_1 + (-1) \frac{x+iy}{\sqrt{2(1-z)}} x_2$$

$$\text{för } \mathbf{n} = x\hat{u} + y\hat{v} + z\hat{k} \\ \text{med } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Experiment: Utgå från ett spinn i ett tillstånd

$$\psi \in \mathcal{H} \text{ (normerat)}$$

Gör en mätning med mättrikt. $\mathbf{n}$

$$\rightarrow \text{svaras med uppdelning } \psi = c_{\mathbf{n}}^\uparrow \psi_{\mathbf{n}}^\uparrow + c_{\mathbf{n}}^\downarrow \psi_{\mathbf{n}}^\downarrow$$

Sannolikhet för "spinn upp":

$$P_\uparrow = |c_{\mathbf{n}}^\uparrow|^2$$

$$\text{och "spinn ner"} : P_\downarrow = |c_{\mathbf{n}}^\downarrow|^2$$

$$\left. \begin{array}{l} P_\uparrow = |c_{\mathbf{n}}^\uparrow|^2 \\ P_\downarrow = |c_{\mathbf{n}}^\downarrow|^2 \end{array} \right\} P_\uparrow + P_\downarrow = 1$$

Obs! $c_{\mathbf{n}}^\uparrow, c_{\mathbf{n}}^\downarrow$ kallas för "sannolikhetsamplituder"

Antag resultatet "spinn upp" $\rightarrow$ elektronen befinner sig i tillståndet $\psi_{\mathbf{n}}^\uparrow$ (normerat)

Ny mätning (med ny riktning $\mathbf{n}' = x'\hat{u} + y'\hat{v} + z'\hat{k}$,
($x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$))

Svarar mot uppdelningen

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{n'}^{\uparrow} \oplus \mathcal{H}_{n'}^{\downarrow}$$

med multipler av $\psi_{n'}^{\uparrow}$ resp. $\psi_{n'}^{\downarrow}$

Behöver utveckla $\psi_n^{\uparrow}$ i ON-basen $\psi_{n'}^{\uparrow}, \psi_{n'}^{\downarrow}$

Resultatet:

$$\psi_n^{\uparrow} = c^{\uparrow} \psi_{n'}^{\uparrow} + c^{\downarrow} \psi_{n'}^{\downarrow}$$

där

$$\left\{ \begin{aligned} c^{\uparrow} &= \frac{1}{2} \frac{(x' + iy')(x - iy)}{\sqrt{(1 - z')(1 - z)}} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - z')(1 - z)} \\ c^{\downarrow} &= \frac{x - iy}{2} \sqrt{\frac{1 - z'}{1 - z}} - \frac{x' - iy'}{2} \sqrt{\frac{1 - z}{1 - z'}} \end{aligned} \right.$$

Sannolikheten för "spinn upp" i andra mätningen:

$$\begin{aligned} |c^{\uparrow}|^2 &= \dots = \frac{1}{2} (1 + x'x + y'y + z'z) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos \Theta) = \cos^2 \frac{\Theta}{2} \end{aligned}$$

där Θ = vinkeln mellan n och n'

"Spinn ner": $|c^{\downarrow}|^2 = \dots = \sin^2 \frac{\Theta}{2}$