# Uppskattning av kurvintegraler

## Sats (Triangelolikhet för integraler)

$$\left|\int_a^b g\,dt\right| \leq \int_a^b |g|\,dt \quad ; \quad g = h + if \quad , \quad h, f \text{ är reella}$$

$$\sqrt{\left(\int h\,dt\right)^2 + \left(\int f\,dt\right)^2} \leq \int \sqrt{h^2 + f^2}\,dt$$

## Bevis

Välj $\theta$ s.a. $e^{i\theta} \underbrace{\int_a^b g\,dt}_{re^{i\alpha}} \geqslant 0$ $\quad (\theta = -\alpha)$

## Sats (Uppskattning av kurvintegraler)

Låt $f$ vara en komplexvärd funktion kontinuerlig på $\gamma$

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leq \sup_\gamma |f|\,|\gamma|$$

(supremum ≈ maximum om det existerar)

## Bevis

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}\,dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\dot{\gamma}|\,dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \sup|f|\,|\dot{\gamma}|\,dt = \sup|f| \cdot \underbrace{\int_a^b \sqrt{(\dot{\gamma}_1)^2 + (\dot{\gamma}_2)^2}\,dt}_{L(\gamma)\text{-längden av } \gamma} = \sup|f|\,L(\gamma)$$

# Cauchy-Riemanns ekv (Sats 1; NV)

## Sats

Om $f'(a)$ existerar $\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0$ i $a$

Mer explicit $f = u + iv$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

## Bevis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{\substack{k \to 0 \\ k \in \mathbb{R}}} \frac{f(a+ik) - f(a)}{ik}\, i = i f'(a)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = f'(a) \underbrace{-}_{i^2 = -1} f'(a) = 0$$

# Cauchy-Riemanns ekv (Sats 3; TV)

## Sats

Antag att $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ existerar och f är differentierbar

dvs. $f(a+(h+ik)) - f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + O(|h|+|k|)$

Antag att f uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.
Då existerar $f'(a)$

$$\frac{O(|h|+|k|)}{|h|+|k|} \xrightarrow[h,k \to 0]{} 0$$

## Bevis

$$f(a+h+ik) - f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + O =$$

$$= h\frac{\partial f}{\partial x} + ik\frac{\partial f}{\partial x} + O = (h+ik)\frac{\partial f}{\partial x} + O$$

$$\frac{f(a+r) - f(a)}{r} = \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{O}{r} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

$\Rightarrow$ $f'(a)$ existerar och $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$

# Cauchy-Riemanns ekv. (~~\#~~ TV)

## Sats

Antag att $f = u + iv$ sådan att alla derivater av $u$ och $v$ existerar och är kontinuerliga i ett område $D$. dvs.

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in C\{\overbrace{z : |z - z_0| \leq r}^{D}\}$$

om $f$ uppfyller CR så existerar $f'(z_0)$

## Bevis

Taylorutveckling av $u$ resp $v$ nära punkten $z_0 = (x_0, y_0)$ ger:

$$u(x_0+\delta, y_0+\varepsilon) = u(x_0, y_0) + \delta \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \delta E_1 + \varepsilon E_2$$

$$v(x_0+\delta, y_0+\varepsilon) = v(x_0, y_0) + \delta \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + \delta E_3 + \varepsilon E_4$$

$$\begin{cases} f = u + iv, \quad h = \delta + i\varepsilon \Rightarrow f(z_0+h) = u(z_0+h) + iv(z_0+h) \\ CR \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$u(x_0, y_0) + \delta \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + i\delta \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$+ i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \delta[E_1 + iE_3] + \varepsilon[E_2 + iE_4] =$$

$$= f(z_0) + \underbrace{(\delta + i\varepsilon)}_{h}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \delta[E_1 + iE_3] + \varepsilon[E_2 + iE_4]$$

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\delta(E_1 + iE_3) + \varepsilon(E_2 + iE_4)\right)/h$$

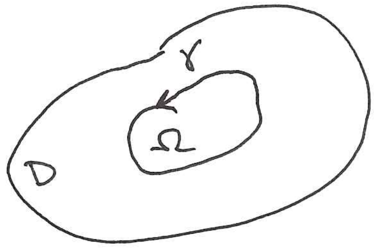
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z_0) \quad \Big\{ \text{då } h = \delta + i\varepsilon \text{ går mot noll.}$$

# Cauchys Sats

## Sats

Om $f \in A(D)$ och $\gamma$ är enkel, styckvis glatt kurva sådan att $\gamma \in D$ och $\Omega = \text{int}(\gamma) \in D$

Så är $$\int_\gamma f\,dz = 0$$




## Bevis

Antag att $f'$ är kontinuerlig:

$$\Longrightarrow \int_\gamma f\,dz = \xrightarrow{\text{Greens}} = i \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\,\partial x \partial y$$

Då $f \in A(D) \xrightarrow{CR} \dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f\,dz = 0$$

# Moreras Sats

## Sats

Antag $f \in C(D)$ och $\int_\gamma f\,dz = 0 \quad \forall \gamma$, där $\gamma$ är en triangel sådan att $\gamma \in D$ och ~~$\gamma$~~ $\text{int}(\gamma) \in D$

Då: $f \in A(D)$.

## Bevis

Låt $z_0 \in D$ och $\Omega = \{z : |z - z_0| < r\}$, $r > 0$ så litet att $\Omega \in D$.

sätt $\quad F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$. och låt $h$ vara ett litet komplext tal sådan att

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z}^{z+h} f(w)\,dw$$

$$\left( \int_{0}^{z+h} + \int_{z+h}^{z} + \int_{z}^{0} \right) f(w)\,dw = 0$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \int_{z}^{z+h} \frac{f(w) - f(z)}{h}\,dw$$

Antag $\varepsilon > 0$ och sätt $\delta$ litet s.a. $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ då $|w - z| < \delta$. Då $|h| < \delta$:

$$\left| \int_{z}^{z+h} f(w) - f(z)\,dw \right| < \varepsilon |h|$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon \quad \text{om } |h|<\delta$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$$

$\longrightarrow$ $F'(z)$ existerar och $f(z) = F'(z)$

$\longrightarrow$ $F(z) \in A(D)$

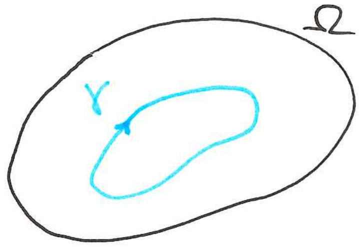
$\longrightarrow$ $F'(z) = f(z) \in A(D)$

# Cauchys Integralformel

## Sats

Låt $f \in A(\Omega)$, $\Omega$ område, $\gamma$ kurva i $\Omega$ som begränsas $W \subseteq \Omega$. Då

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}\, dz = f(p)$$




## Bevis

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}\, dz = \int_{|z-p|=r} \frac{f(p)}{z-p}\, dz = \left\{ \text{Låt } r \to 0 \right\} =$$

$\left\{ \text{ty } \frac{f(z)}{z-p} \text{ holo i området mellan } \gamma \text{ och cirkeln} \right\}$

$$= f(z) = f(p) + \underbrace{o(1)}_{\substack{\to 0 \\ \text{då } r \to 0}} \quad \text{om } \{|z-p|=r\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-p|=r} \frac{f(p)}{z-p}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-p|=r} \frac{o(1)}{z-p}\, dz =$$

$$= f(p) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-p|=r} \frac{dz}{z-p} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+p)=r} \frac{o(1)}{z-p}\, dz =$$

$$= \left( \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-p|=r} \frac{o(1)}{z-p}\, dz \right| \leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} \sup \frac{|o(1)|}{\underbrace{|z-p|}_{\cancel{r}}} \cancel{2\pi r} \right) = f(p)$$

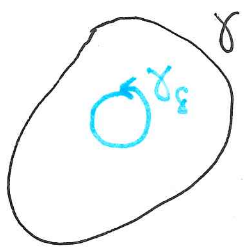
# Cauchys Integralformel

## Sats

Antag $f \in \mathcal{A}(D)$ och $\gamma$ är en styckvis glatt, positivt orienterad, enkel, sluten kurva sådan att $\gamma \in D$ och $\Omega = \text{int}(\gamma) \in D$. Då gäller:


$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \forall z \in D$$

## Bevis




Låt $\gamma_\delta = \{|w-z| = \delta\} \in \gamma$

CS använd på området mellan $\gamma$ och $\gamma_\delta$ ger:

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\gamma_\delta} \frac{f(w)\,dw}{w-z} = 0 \qquad \{\text{pga nyckelhålsprincipen}\}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\gamma_\delta} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right] = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)$$

$$\left\{ f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{w-z}\,dw \right\}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\right| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta}\frac{f(w)}{w-z}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta}\frac{f(z)}{w-z}\,dz\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\max_{\gamma_\delta}\frac{|f(w)-f(z)|}{\delta}|\gamma_\delta|$$

$$\left\{|\gamma_\delta| = 2\pi\delta\right\} = \max_{\gamma_\delta}|f(w)-f(z)| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\right| \leqslant 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)$$

# Liouvilles Sats

## Sats

Antag att $f \in A(\mathbb{C})$ och $|f(z)| \leq M$

Då är $f \equiv C$ (konst.)

## Bevis

Låt $g(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{z}$

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \quad ; \quad f(0) = a_0 \longrightarrow f(z) - f(0) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n$$

$$g(z) = \frac{1}{z} \sum_{1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{1}^{\infty} a_n z^{n-1} \in A(\mathbb{C})$$

$$|g(z)| \leq \frac{2M}{|z|} \leq \frac{2M}{R} \quad \{\text{om } |z| > R\}$$

Cauchy på $g(z)$ medför

$$|g(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \right| \leq \underbrace{\cancel{\frac{1}{2\pi}}}\cdot \underbrace{\frac{2M}{\cancel{R}}}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{R - |z|}}_{(2)} \cdot \underbrace{\cancel{2\pi R}}_{(3)} \leq \underbrace{\frac{2M}{R - |z|}}_{(4)} \quad (*)$$

$$(*) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$\longrightarrow g(z) = 0 \quad \forall z$

$\longrightarrow f(z) = f(0) \quad \forall z$, dvs $f \equiv C$

(1) från $|g(z)| \leq \dfrac{2M}{|z|}$

(2) från felvänd triangelolikhet

(3) från integralen (blir int. över en cirkel

(4) $|z| > R \longrightarrow \dfrac{2M}{\infty}$

# Liouvilles Sats

## Sats

Antag $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ och $|f(z)| \leq M$

Då är $f \equiv c$

## Bevis

Låt $g(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{z}$

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \; ; \quad f(0) = a_0 \longrightarrow f(z) - f(0) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n$$

$$g(z) = \frac{1}{z} \sum_{1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{1}^{\infty} a_n z^{n-1} \Longrightarrow g(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$$

$$|g(z)| \leq \frac{|f(z) - f(0)|}{|z|} \leq \frac{|f(z)| + |f(0)|}{|z|} \leq \frac{2M}{R} \qquad |z| = R$$

$$\left\{ \; g(z) \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{g(w)}{w - z} \, dw \; \right\}$$

$$|g(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|w|=R} \frac{|g(w)|}{|w - z|} \, 2\pi R \leq$$

$$\leq 2M \max_{|w|=R} \left( \frac{1}{|w - z|} \right) \leq \frac{2M}{|w| - R} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow g(z) = 0 \longrightarrow f(z) = f(0) = a_0$$

$$\Longrightarrow f \equiv c$$

# Algebrans Fundamentalsats

## Sats

Låt $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ ; $n \geq 1$

Då finns $z_0 \in \mathbb{C}$ sådan att $p(z_0) = 0$

## Bevis

Antag att $p(z_0) \neq 0$

Sätt $f(z) = \dfrac{1}{p(z)} \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$

Påstå: $f \equiv 0$

$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0| =$$

$$= |z|^n \left( |a_n| - \underbrace{\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z} \right|}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ \text{då } |z| \to \infty}} \right) \geq \delta |z|^n$$

(*) $|f(z)| = \left| \dfrac{1}{p(z)} \right| \leq \dfrac{1}{\delta |z|^n}$ om $|z| > R$ $\{R \equiv \text{konv.radie}\}$

Men $|f(z)| \leq M$ , $|z| \leq R$

dvs. $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ och $|f| \leq M$ {Liouvilles sats}

medför att $f(z) \equiv c$ och (*) medför att $c \equiv 0$

$\longrightarrow f(z) = 0 \longrightarrow p(z) = 0$

# Satsen om Taylorutveckling

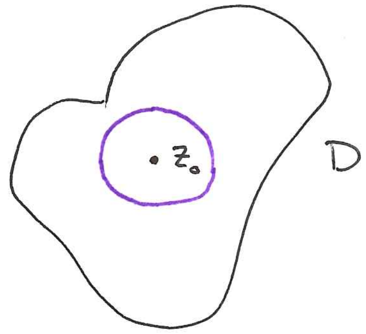
## Sats

Låt $D$ vara ett område och antag $f \in A(D)$.
Säg $z_0 \in D$. Då kan $f$ utvecklas i en potensserie:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n \qquad \begin{cases} \text{om } |z-z_0|<r \\ \text{och } \{z : |z-z_0|<r\} \subseteq D \end{cases}$$

Dessutom:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| < r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$




## Bevis

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0 - (z-z_0)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \underbrace{\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}_{=w}} = \dfrac{1}{1-w} = \sum_0^\infty w^n \\ \text{ty } |w| = \dfrac{|z-z_0|}{|\zeta - z_0|} = \dfrac{s}{r} < 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int f(\zeta) \sum_0^\infty \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_0^\infty \int f(\zeta) \left(\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right) d\zeta =$$

$$= \sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n, \quad \text{där} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

# Satsen om Laurentutveckling

## Sats

Låt $A = \{z : r < |z - z_0| < R\}$ och $f \in A(A)$

Då kan $f$ skrivas som:

$$f = \sum_0^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = f_1(z) + f_2(z)$$

$f_1$ konv. om $|z-z_0| < R$, $f_2$ konv. om $|z-z_0| > r$

## Bevis

Tag $z_0 = 0$ och $r_1$ & $R_1$ s.a. $r < r_1 < |z| < R_1 < R$

Låt $\Gamma : |w| = R_1$, $\gamma : |w| = r_1$. Då:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)dw}{w-z} = f_1 + f_2$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{1 - \frac{z}{w}} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_0^\infty \left(\frac{z}{w}\right)^n f(w) \frac{dw}{w} = \sum_0^\infty a_n z^n$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{\frac{w}{z} - 1} \frac{dw}{z} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \int_\gamma \frac{f(w)dw}{1 - \frac{w}{z}} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \int_\gamma \sum_0^\infty \left(\frac{w}{z}\right)^n f(w)dw$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1}{z^{n+1}} c_n \quad , \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma w^n f(w)dw$$

$$\sum_0^\infty \frac{1}{z^{n+1}} c_n = \left\{ \begin{matrix} k = -(n+1) \\ n = -k-1 \end{matrix} \right\} = \sum_{-\infty}^{-1} z^k c_{-k-1} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{-1} z^k \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)dw}{w^{k+1}} \quad , \quad c_{-k-1} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)dw}{w^{k+1}}$$

## Sats

Om $z_k \to z_0$, $z_k \neq z_0$ och $f(z_k) = 0$, $f$ hdo

Då: $f \equiv 0$

## Bevis

Antag $f \not\equiv 0$ alltså motsägelse.

Då har $f$ ett isolerat nollställe i $z_0$.

dvs $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0) \neq 0$ och $g$ hdo

Men: $f(z_k) \neq 0$ om $k$ stort

ty $z_k \neq 0$ och $g(z_k) \neq$

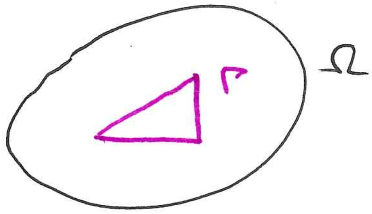
$\Rightarrow$ motsägelse

# Moreras sats

## Sats

Antag $f$ kont. i $\Omega$ och $\int_\Gamma f(z)dz = 0 \ \forall \Gamma$, triangel i $\Omega$

Då: $f \in H(\Omega)$



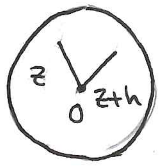

## Bevis

Antag att $\Omega = \Delta(a,r)$ är en disk och $a=0$

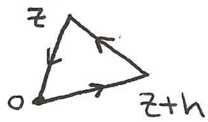
sätt $F(z) = \int_0^z f(w)dw$ (integral längs linje)

Påstående: $F'(z)$ existerar och $F'(z) = f$

↳ Bevis: $F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(w)dw$




Hypotesen $\left(\int_\Gamma f(z)dz = 0\right)$




$\longrightarrow \left(\int_0^{z+h} + \int_{z+h}^{z} + \int_z^{0}\right) f dz = 0$

dvs. $F(z+h) + \int_{z+h}^{z} f(w)dw - F(z) = 0$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)dw$$

Men $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)dw = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[F(w)\Big]_z^{z+h} = \lim_{h\to 0}\Big[F(z+h)-F(z)\Big]$

$= F'(z) = f(z)$

$\Longrightarrow F'(z)$ existerar och $F'(z) = f(z)$

$\Longrightarrow F \in H(\Omega)$

$\Longrightarrow f = F' \in H(\Omega)$