1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2013 08 30, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Bo Berndtsson 772 35 39

---

1. a) Beräkna integralerna
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz$$
(3p)
b)
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz.$$
(4p)

2. Beräkna Fouriertransformen av funktionen
$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}.$$
(7p)

3. Visa att alla nollställen till polynomet $z^4 + z^3 + 1$ ligger i cirkelringen $\{z; 3/4 < |z| < 3/2\}$.
(7p)

4. Vilken funktion har Laplacetransformen
$$\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}?$$
(7p)

5. a)Låt $|a| < 1$. Visa att funktionen
$$M(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$
avbildar enhetsskivan ($\{|z| < 1\}$) konformt på sig själv.
(4p)
b) Låt f vara en holomorf funktion i enhetsskivan som uppfyller $|f(z)| < 1$ för alla z i enhetsskivan. Antag det finns en punkt a där $f(a) = 0$ och $|a| < 1$. Visa att
$$|f(z)| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|.$$
(3p)

6. a) Definiera den komplexa derivatan av en funktion definierad i ett område i det komplexa planet. (1p)
b) Visa att om funktionen f har en komplex derivata i en punkt $a \in \mathbb{C}$ så uppfyller f Cauchy Riemanns ekvationer i den punkten. (4p)

7. Bevisa Cauchy's integralformel. (5p)

8. Låt P och Q vara polynom av grad n och m där $m \geq n$ och antag att P har nollställena z_j där $|z_1| < |z_2| < ...|z_n|$ Visa att Q är delbart med P om och endast om integralerna

$$\int_{|z|=r} \frac{Q}{P} dz,$$

är noll för alla $r \neq |z_j|$.

(5p)

Lycka till!,
BB

Augustikentan (2013)

1. a) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$

$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \dots$

$$\frac{(e^z - e^{-z})}{2} = \left[z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \right]$$

$\therefore \frac{e^z - e^{-z}}{z}$ hol. i 0.

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz = 0.$$

b) $\frac{e^z - e^{-z}}{2z^4} = \left[\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z \cdot 3!} + \dots \right.$

$$\text{Res} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$$

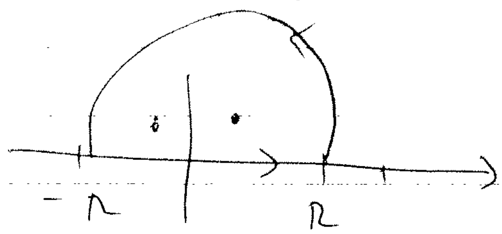
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = \frac{2\pi i}{3}$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

$$\hat{f}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{1+x^4}\,dx$$

$\mathcal{C}_R$.

Låt $\Gamma_R =$



Singulära punkten av

$$\frac{e^{-iaz}}{1+z^4} \;:\quad z^4 = -1 = e^{i\pi}$$

$$z = e^{i\pi/4 + ik\pi/2}$$

i ÖHP $\quad z_0 = e^{i\pi/4}\,, \quad z_1 = e^{3\pi i/4}$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{-iaz}}{1+z^4}\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}_{z_0} + \operatorname{Res}_{z_1}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^{-iaz_0}}{4z_0^3} + \frac{e^{-iaz_1}}{4z_1^3}\right] =$$

(enkelpoler!

$$= \frac{\cancel{2}\pi i}{2}\left[z_0 e^{-iaz_0} + z_1 e^{-iaz_1} \right](-1)$$

(Förläng med z_0 resp z_1 & utnyttja $z_0^4 = z_1^4 = -1$!).

$$z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = e^{3\pi i/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \int_{\Gamma_R} = -\frac{\pi i}{2}\left[e^{-ia(1+i)/\sqrt{2} + i\pi/4} + e^{-ia(-1+i)/\sqrt{2} + 3\pi i/4} \right]$$

$$= -\frac{\pi i}{2} e^{a/\sqrt{2}}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)} + e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)} \right]$$

$$= -\frac{\pi i}{2} e^{a/\sqrt{2}}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)} \right]$$

$$= \pi\, e^{a/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

På $\mathcal{C}_R$:

$$\left| \frac{e^{-iaz}}{1+z^4} \right| \le \frac{e^{ay}}{R^4-1} \le \frac{1}{R^4-1}$$

om $a \le 0$.

$$\therefore \left| \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{-iaz}}{1+z^4} dz \right| \le \frac{2\pi R}{R^4-1} \to 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{1+x^4} dx = \pi \sqrt{2}\, e^{a/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

om $a < 0$. Om $a > 0$ så

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{1+x^4} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(-a)x}}{1+x^4} dx}$$

$$= \pi \sqrt{2}\, e^{-a/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

HB.

3) $p(z) = z^4 + z^3 + 1$

samma som januari.

4. $\tilde{u}(s) = \dfrac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}$

(i) $\tilde{v}(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{(s-1)}\right)$

$\Rightarrow v = \frac{1}{2}\left[e^{3t} - e^{t}\right]. \quad t > 0.$

(ii) $\mathcal{L}(v(t-2))(s) = e^{-2s}\tilde{v} = \tilde{u}$

$\therefore u = v(t-2) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[e^{3(t-2)} - e^{(t-2)}\right] & \text{om } t > 2 \\ 0 & \text{om } t < 2. \end{cases}$$

5 a) Visa att

$$M(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, \quad |a|<1$$

avbildar enhetsskivan $\{|z|<1\}$ konformt på sig själv.

(1) Tag 3 punkter på cirkeln $|z|=1$, $-1, i, 1$.

$$M(-1) = \frac{a-1}{1-\bar{a}}$$

$$\therefore |M(-1)| = \frac{|a-1|}{|1-\bar{a}|} = \underline{1}.$$

$$M(1) = \frac{1+a}{1+\bar{a}}; \quad |M(1)| = \underline{1}.$$

$$M(i) = \frac{i+a}{1+i\bar{a}}, \quad |M(i)| = \frac{|i+a|}{|1-ia|} =$$

$$= \frac{|i+a|}{|-i(i+a)|} = \underline{1}.$$

M avbildar alltså 3 punkter på enhetscirkeln på enhetscirkeln.

$\therefore$ M avbildar enhetscirkeln på enhetscirkeln.

(ii) Det följer att M avbildar enhetsskivan på sig själv eller på området utanför enhetscirkeln. Men

$$M(0) = a \in \text{enhetsskivan}.$$

$\therefore$ M avbildar enhetsskivan på sig själv.

(b) Antag f holomorf i enhetsskivan & $f(a) = 0$ & $|f(z)| \leq 1$

~~Då~~ Låt $g(w) = f(M(w))$

$g(0) = 0$. Schwartz lemma $\Rightarrow$

$|g(w)| \leq |w|$

8

$\therefore \quad |g(M^{-1}(z))| \leq |M^{-1}(z)|$

$\therefore \quad |f(z)| \leq |M^{-1}(z)| = \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|.$

8. P & Q är polynom

~~P har nollställena $z_1, \ldots z_n$~~

av grad n resp. m, $m \geq n$

P har nollställena $z_1, \ldots z_n$

$|z_1| < |z_2| < \ldots |z_n|$ &

$$\int_{|z|=r} \frac{Q}{P} \, dz = 0 \qquad r \neq |z_j|$$

Väl i först r; $|z_1| < r < |z_2|$

$$\int_{|z|=r} \frac{Q}{P} \, dz = 2\pi i \, \frac{Q(z_1)}{P'(z_1)} = 0$$

$\therefore \quad Q(z_1) = 0.$

välj sedan

$$|z_2| < r < |z_3|$$

$$0 = \int_{|z|=r} \frac{Q}{P}\, dz = 2\pi i \left(\frac{Q(z_1)}{P'(z_1)} + \frac{Q(z_2)}{P'(z_2)} \right)$$

$\therefore \quad Q(z_2) = 0.$

Fortsätt!