Matematik Chalmers

Tentamen i TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2011–10–21; KL 8:30-12:30

Telefon: Martin Berglund: 0703-088304.
Hjälpmedel: Endast utdelad (vänd textlappen) tabell. Kalkylator ej tillåten.
Uppgift 7 ger max 8p, och uppgifterna 1-6 ger max 7 poäng var.
Betygsgränser: **3**: 20-29p, **4**: 30-39p och **5**: 40p- Lösningar/Granskning: Se Hemsidan, kursdagbok.

---

1. f är en två gånger deriverbar funktion på intervallet (a,b) och $\pi_1 f$ är dess linjära interpolant. Visa att

$$||\pi_1 f - f||_{L_\infty(a,b)} \le (b-a)^2 ||f''||_{L_\infty(a,b)}.$$

2. Lös följande integro-differentialekvation med Laplacetransformation:

$$y''(t) - y'(t) + y(t) - \int_0^t y(\tau)\, d\tau = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

3. a) Bestäm en a priori feluppskattning för

$$\begin{cases} -u'' + cu' = f, & 0 < x < 1, \qquad b \ge 0 \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

i energinormen $||e||_E = ||e'||$. Där $||\cdot||$ är L_2-normen, dvs $||w||^2 = \int_0^1 w(x)^2\, dx$.
b) För vilka c värden blir felet minimal?

4. Beräkna styvhet- och mass-matris och lastvektor för styckvis linjära finitelement approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}u'' - 3u = -1, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \qquad u'(1) = -1, \end{cases}$$

på en partition $\mathcal{T}_h : x_0 = 0,\, x_1 = 1/2,\, x_2 = 1,\, (h = 1/2)$, av intervallet $[0,1]$.

5. Beräkna Fourier sinus-serie för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 \le x < \pi. \end{cases}$$

6. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t - 1, & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1. & \end{cases}$$

7. Visa, att om funktionen f är 2π-periodisk och styckvis kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$ med de komplexa Fourierkoefficienterna C_n, så gäller Bessels olikhet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

LYCKA TILL!

MA

Table of Laplace Transforms and trigonomerty

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\frac{t}{2b}\sin bt$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$
$2\sin a\sin b \quad =$	$=\cos(a-b)-\cos(a+b)$
$2\sin a\cos b \quad =$	$=\sin(a-b)+\sin(a+b)$
$2\cos a\cos b \quad =$	$=\cos(a-b)+\cos(a+b)$

TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2011–10–21; KL 8:30-12:30. Lösningar.

---

1. See Lecture Notes.

2. Laplacetransformering ger

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - sY(s) + y(0) + Y(s) - \frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Gemon att ersätta $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ får vi

$$\Big(s^2 - s + 1 - \frac{1}{s}\Big)Y(s) = \frac{1}{s} - 1 = \frac{1-s}{s}.$$

Alltså

$$\Big(s^3 - s^2 + s - 1\Big)Y(s) = 1 - s \quad \Longleftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1-s}{s^3 - s^2 + s - 1}.$$

Men eftersom

$$s^3 - s^2 + s - 1 = s^2(s-1) + (s-1) = (s^2+1)(s-1),$$

vi kan skriva

$$Y(s) = \frac{1-s}{(s^2+1)(s-1)} = -\frac{1}{s^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad y(t) = -\sin(t).$$

3. Vi multiplicerar differentialekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(I),\ I = (0,1)$ och integrerar över I. Partial integration och randdata leder till följande *variation problem*: Finn $u \in H_0^1(I)$ så att

$$\int_I (u'v' + cu'v) = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{1}$$

En finitelement Metod med $cG(1)$ formuleras som: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$\int_I (U'v' + cU'v) = \int_I fv, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I), \tag{2}$$

där

$$V_h^0 = \{v : v \text{ is piecewise linear and continuous in a partition of } I,\ v(0) = v(1) = 0\}.$$

Låt $e = u - U$, då ger (1)-(2)

$$\int_I (e'v' + ce'v) = 0, \quad \forall v \in V_h^0. \tag{3}$$

A priori feluppskattning: Vi använder oss av $e(0) = e(1) = 0$, och får

$$\int_I e'e = \int_I \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^2) = (e^2)|_0^1 = 0. \tag{4}$$

Så kan vi skriva

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 &= \int_I (e'e') = \int_I (e'e' + ce'e) = \int_I \Big(e'(u-U)' + ce'(u-U)\Big) \\
&= \{v = U - \pi_h u \text{ in}(3)\} = \int_I \Big(e'(u - \pi_h u)' + ce'(u - \pi_h u)\Big) \\
&\le \|(u - \pi_h u)'\|\,\|e'\| + c\|u - \pi_h u\|\,\|e'\| = \{\|u - \pi_h u\|_E + c\|u - \pi_h u\|\}\|e\|_E.
\end{aligned}$$

Med Poincare:s olikhet får vi

$$\|e\|_E \le (c+1)\|u - \pi_h u\|_E = (c+1)\|(u - \pi_h u)'\| \le (c+1)\|hu''\|.$$

(b) Vi ser att felet är minst då $c = 0$, dvs om det inte finns någon konvektionsterm.

4. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = 0\}$ och integrera över $I = [0, 1]$,

$$\frac{1}{4}\int_0^1 u'v'\,dx - \frac{1}{4}[u'(x)v(x)]_0^1 - 3\int_0^1 uv\,dx = -\int_0^1 v\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Gemon att sätta in randdata får vi variationsformuleringen: Finn $u \in H_0^1$ så att

$$\text{(VF)} \qquad \frac{1}{4}\int_0^1 u'v'\,dx - 3\int_0^1 uv\,dx = -\int_0^1 v\,dx - \frac{1}{4}v(1), \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Motsvarande finitelementmetoden är:

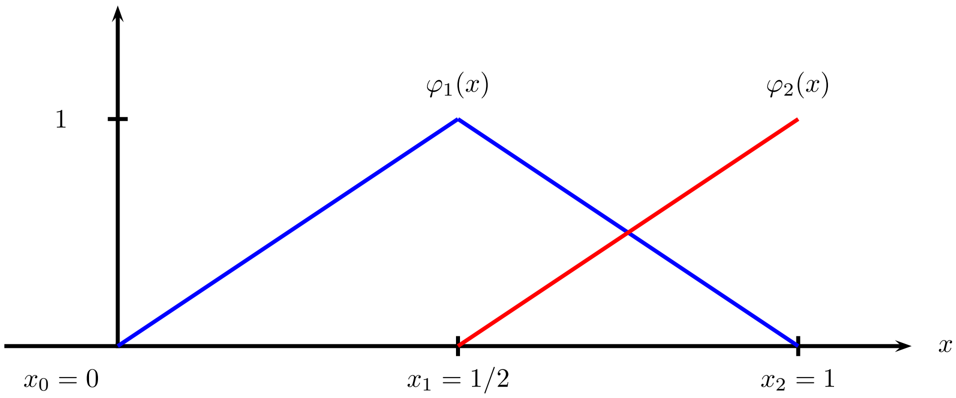
Finn $U \in V_h = \{v : v \text{ är kontinuerlig styckvis linjär på } \mathcal{T}_h,\ v(0) = 0\}$ så att

$$\text{(FEM)} \qquad \frac{1}{4}\int_0^1 U'v'\,dx - 3\int_0^1 Uv\,dx = -\int_0^1 v\,dx - \frac{1}{4}v(1), \qquad \forall v \in V_h.$$

Vi har att $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2 - 2x, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

är de hela resp. halva basfunktioner på paritionen $\mathcal{T}_h$, $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$. Vi sätter in



$U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$, $v = \varphi_1(x)$ och $v = \varphi_2(x)$ i (FEM) och får 2×2 linjär ekvationssystem för ξ_1 och ξ_2 som $M\xi = b$ med

$$M = \left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \int_0^1 {\varphi_1'}^2 & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' \\ \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' & \int_0^1 {\varphi_2'}^2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_1\varphi_2 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2 \end{pmatrix}\right],$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad b = -\begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_2(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Vi räknar de numeriska värdena för styvhet-, konvektion-, resp. massmatris för φ_1 och φ_2 och får

$$\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 3\frac{h}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

vilket slutligen ger, med $h = 1/2$, att

$$\begin{pmatrix} 0 & -3/4 \\ -3/4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \xi_1 = \xi_2 = 2/3.$$

$$U(x) = \frac{2}{3}\varphi_1(x) + \frac{2}{3}\varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

5. För utveckling av $f(x)$ i sinusserie definierar vi $f(x)$ även för $x \le 0$ så att $f(x)$ blir en udda funktion. Vi har då $2L = 2\pi, (L = \pi)$ och

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

där,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx\Big] = \{nx = y\} \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{n\pi/2} y\sin y\,dy + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \pi\sin nx\,dx - \frac{2}{\pi n^2}\int_{n\pi/2}^{n\pi} y\sin y\,dy \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\Big[\sin y - y\cos y\Big]_0^{n\pi/2} - \frac{2}{n}\Big[\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\Big] - \frac{2}{\pi n^2}\Big[\sin y - y\cos y\Big]_{n\pi/2}^{n\pi} \\
&= \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}, & n = 2k+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Observera att den expandirade 2π-periodiska funktionen $f(x)$ är kontinuerlig. Därför

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}\sin(2k+1)x.$$

6. Ekvationen är inhomogen. Vi gör följande ansats: $u(x,t) = S(x) + v(x,t)$. Då får vi att

$$\begin{cases} S''(x) = -1, \\ S'(0) = S(1) = 0, \end{cases} \implies S(x) = \frac{1-x^2}{2} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} v_{xx} = v_t, \\ v_x(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = -S(x) = \frac{x^2-1}{2}. \end{cases}$$

Sätt $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. Då är $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda$. Man ser med hjälp av randdata att endast $\lambda < 0$ ger icke-triviala lösningar. Härav får vi följande lösningar för ode för X och T:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_n = -(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 := -\alpha_n^2 \\ X_n(x) = \cos(n+\frac{1}{2})\pi x := \cos\alpha_n x. \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Observera att här startar indexen med $n = 0$. Detta innebär inte att λ_n får vara 0 (se ovan!)

$$T_n'(t) = -\alpha_n^2 T_n(t) \implies T_n(t) = A_n e^{-\alpha_n^2 t}.$$

Superposition ger att

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 t}\cos\alpha_n x,$$

där A_n ges av begynnelsevillkoret:

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos\alpha_n x = \frac{x^2-1}{2}.$$

Dvs A_n är Fourierkoefficienter av funktionen $\frac{x^2-1}{2}$ med avseende på basen $\{\cos\alpha_n x\}_{n=0}^{\infty}$ över (0,1).

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{1/2}\int_0^1 \frac{x^2-1}{2}\cos\alpha_n x\,dx = \int_0^1 (x^2-1)\cos\alpha_n x\,dx \\
&= \frac{1}{\alpha_n}\Big[(x^2-1)\sin\alpha_n x\Big]_0^1 - \frac{2}{\alpha_n}\int_0^1 x\sin\alpha_n x\,dx \\
&= \frac{2}{\alpha_n^2}\Big[x\cos\alpha_n x\Big]_0^1 - \frac{2}{\alpha_n^2}\int_0^1 \cos\alpha_n x\,dx = -\frac{2}{\alpha_n^3}\Big[\sin\alpha_n x\Big]_0^1 = -\frac{2}{\alpha_n^3}(-1)^n.
\end{aligned}$$

Därför får vi att

$$v(x,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\alpha_n^3} e^{-\alpha_n^2 t} \cos \alpha_n x.$$

Slutligen

$$u(x,t) = \frac{1-x^2}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{[(n+\frac{1}{2})\pi]^3} e^{-[(n+\frac{1}{2})\pi]^2 t} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

7. See Lecture Notes.

MA