Matematik Chalmers

Tentamen i TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2010–10–22; KL 14:00-18:00

Telefon: Fredrik Lindgren: 0703-088304.
Hjälpmedel: Endast utdelad (vänd textlappen) tabell för Laplacetransformer. Kalkylator ej tillåten.
Uppgifterna 1-6 ger max 7p var, och uppgift 7 ger max 8 poäng.
Betygsgränser: **3**: 20-29p, **4**: 30-39p och **5**: 40p- Lösningar/Granskning: Se Hemsidan, kursdagbok.

---

1. Betrakta följande, 1-dimensionella, vågekvation:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = u_0(x), & u_t(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$

Visa att den totala energin är konstant (konservering av energin). Dvs, visa att

$$\frac{1}{2}||\dot{u}||^2 + \frac{1}{2}||u'||^2 = \text{konstant}, \qquad \text{där} \quad \dot{u} = u_t, \qquad u' = u_x.$$

2. Bestäm den styckvis linjära finitelement lösningen för konvektion-diffusion problemet:

$$-u''(x) + 2u'(x) = 2, \quad 0 < x < 2; \qquad u(0) = 0, \quad u'(2) = -1,$$

i den likformiga partitionen: $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Dvs 2 delintervaller av $[0,2]$, och $h = 1$.

3. Använd Laplacetransformer och lös integro-differential ekvationen

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau)\, d\tau = 1 + \cos t, \quad t > 0, \qquad y(0) = 2.$$

4. Betrakta det tidsberoende problemet $\quad \dot{u}(t) + au(t) = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = 1.$

Låt $a = 40$. Skissera som funktioner av nk, $n = 0, 1, \ldots,$ de approximationer U_n, av $u(nk)$ som erhålls med (i) dG(0), (ii) cG(1) metoder, båda med tidsteget $k = 0.1$.

OBS! dG(0): $v = 1$, U konstant på $(t_{n-1}, t_n]$. cG(1): $v = 1$, och U linjär på $(t_{n-1}, t_n]$.

5. Utvecka funktionen $\sin x$ i cosinusserie på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. Använd resultatet för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

6. Låt U vara den styckvis linjära finitelement approximationen för

$$-\varepsilon u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

i en partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$. Sätt $e = u - U$ och visa en a priori feluppskattning av formen

$$||e||_E \le C_i h \sqrt{\varepsilon + h^2}\, ||u''||, \qquad \text{där} \quad ||e||_E^2 = \varepsilon ||e'||^2 + ||e||^2, \quad \text{och} \quad ||w||^2 = \int_0^1 w(x)^2\, dx.$$

Ledning: På slutet kan man använda olikheten: $\alpha AB \le \frac{1}{2}\alpha A^2 + \frac{1}{2}\alpha B^2$, (med lämpliga val av α).

7. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & & 0 < x < L, & t > 0, \\ u(0,t) = 1, & u_x(L,t) = 0, & & t > 0, \\ u(x,0) = 1, & u_t(x,0) = 0, & 0 < x < L. & \end{cases}$$

LYCKA TILL!

MA

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\frac{t}{2b} \sin bt$	$\frac{s}{(s^2 + b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2 + b^2)^2}$

TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2010–10–22; KL 14:00-18:00. Lösningar.

---

1. Se FEMs for PDEs, (Theorem 26, sid. 138).

2. Multiplicera pde:n med en testfunktion v med $v(0)=0$, integrera över $x \in (0,2)$:

$$
\begin{aligned}
&-[u'v]_0^2 + 2\int_0^2 u'v\,dx = 2\int_0^2 v\,dx \qquad \Longleftrightarrow [PI]\\
(1)\qquad &-u'(2)v(2) + u'(0)v(0) + 2\int_0^2 u'v\,dx = 2\int_0^2 v\,dx \quad \Longleftrightarrow\\
&\int_0^2 u'v'\,dx + 2\int_0^2 u'v\,dx = 2\int_0^2 v\,dx - v(2)
\end{aligned}
$$

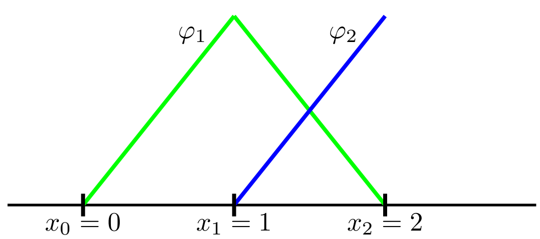
Den kontinuerliga variationsformuleringen är nu som följer: Bestäm

$$u \in V := \{w : \int_0^1 \Big(w(x)^2 + w'(x)^2\Big)\,dx < \infty, \quad w(0)=0\},$$

så att

$$(VF) \qquad \int_0^2 u'v'\,dx + 2\int_0^2 u'v\,dx = 2\int_0^2 v\,dx - v(2), \quad \forall v \in V.$$

För att diskretisera låt nu $\mathcal{T}_h$ vara en likformig indelning av intervallet $[0,2]$ i två delintervall $I_1=[x_0,x_1]=[0,1]$ och $I_2=[x_1,x_2]=[1,2]$, där eftersom $u(2)$ är inte känd, så har vi en "halv hatt-fuktion" i ändpunkten $x=2$ (se Fig. för $N=2$, $h=1$, och därmed 2 delintervaller).



Nu är finitelement formuleringen (den diskreta variationsformuleringen) som följer: Bestäm

$u_h \in V_h := \{w_h : w_h$ är styckvis linjär och kontinuerlig på $\mathcal{T}_h : 0 = x_0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ w_h(0) = 0\}$,

så att

$$(2) \qquad (FEM) \qquad \int_0^2 u_h'v'\,dx + 2\int_0^2 u_h'v\,dx = 2\int_0^2 v\,dx - v(2), \quad \forall v \in V_h.$$

V_h genereras av φ_1 och φ_2, där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}, \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ x-1 & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Värför kan vi sätta in, i FEM, $u_h(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ och $v = \varphi_i(x),\ i = 1,2$. Alltså har vi att

$$\Big(\int_0^2 \varphi_1'\varphi_1'\,dx\Big)\xi_1 + \Big(\int_0^2 \varphi_1'\varphi_2'\,dx\Big)\xi_2 + 2\Big(\int_0^2 \varphi_1\varphi_1'\,dx\Big)\xi_1 + 2\Big(\int_0^2 \varphi_1\varphi_2'\,dx\Big)\xi_2 = 2\int_0^2 \varphi_1\,dx - \varphi_1(2),$$

$$\Big(\int_0^2 \varphi_2'\varphi_1'\,dx\Big)\xi_1 + \Big(\int_0^2 \varphi_2'\varphi_2'\,dx\Big)\xi_2 + 2\Big(\int_0^2 \varphi_2\varphi_1'\,dx\Big)\xi_1 + 2\Big(\int_0^2 \varphi_2\varphi_2'\,dx\Big)\xi_2 = 2\int_0^2 \varphi_2\,dx - \varphi_2(2).$$

I matrisformen är detta

$$\begin{pmatrix} \int_0^2 \varphi_1'\varphi_1'\,dx & \int_0^2 \varphi_1'\varphi_2'\,dx \\ \int_0^2 \varphi_2'\varphi_1'\,dx & \int_0^2 \varphi_2'\varphi_2'\,dx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \int_0^2 \varphi_1\varphi_1'\,dx & \int_0^2 \varphi_1\varphi_2'\,dx \\ \int_0^2 \varphi_2\varphi_1'\,dx & \int_0^2 \varphi_2\varphi_2'\,dx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$= 2\begin{pmatrix} \int_0^2 \varphi_1\,dx \\ \int_0^2 \varphi_2\,dx \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi_1(2) \\ \varphi_2(2) \end{pmatrix}$$

eller, $(S+2K)\xi = b$, med S och K som styvhets, resp. konvektions matriser och b lastvektor. Med hänsyn till den halvhatt-funktioned φ_2 kan vi nu skriva numeriska formen av ekvationen som

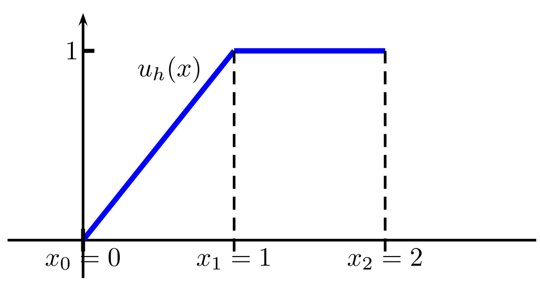
$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Slutligen har vi att

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi_1 = \xi_2 = 1,$$

och därmed

$$u_h(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1 & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$



3. Laplacetransformering ger

$$\begin{aligned} &sY(s) - y(0) + \frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} \qquad \Longrightarrow \\ &\frac{s^2+1}{s}Y(s) = 2 + \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} = \frac{2s(s^2+1)+(s^2+1)+s^2}{s^2+1} \Longrightarrow \\ &Y(s) = \frac{2s(s^2+1)+(s^2+1)+s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{s^2}{(s^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Vi kan skriva den sista termen som

$$\frac{s^2}{(s^2+1)^2} = s \cdot \frac{s}{(s^2+1)^2} \equiv sF(s), \qquad \text{där} \quad F(s) := \frac{s}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} \subset \frac{1}{2}t\sin t := f(t).$$

Alltså

$$sF(s) \subset f'(t) + f(0) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\cos t.$$

Därmed

$$y(t) = 2\cos t + \sin t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\cos t = \frac{3}{2}\sin t + (2 + \frac{1}{2}t)\cos t.$$

4. Vi skriver allmänna variationsformulering för $\dot{u}(t) + au(t) = 0$, på intervallet $(t_{n-1}, t_n]$ som

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\dot{u}(t) + au(t))v(t)\,dt = 0, \qquad \forall v.$$

Med $U_n = U(t_n)$, $U_{n-1} = U(t_{n-1})$, $v \equiv 1$ och a konstant har vi följande FEM

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \dot{U}(t) + aU(t)\,dt = U_n - U_{n-1} + a\int_{t_{n-1}}^{t_n} U(t)dt = 0. \tag{3}$$

I dG(0) är $U(t) = U_n$ på intervallet $(t_{n-1}, t_n]$. Med $a = 40$ and $k = t_n - t_{n-1} = 0.1$, får vi då

$$U_n - U_{n-1} + akU_n = 0 \Longrightarrow \begin{cases} U_n = \frac{1}{1+40\times(0.1)} U_{n-1} = \frac{1}{5}U_{n-1}, \\ U_0 = 1. \end{cases}$$

I cG(1) är $U(t)$ linjär på intervallet $(t_{n-1}, t_n]$: dvs

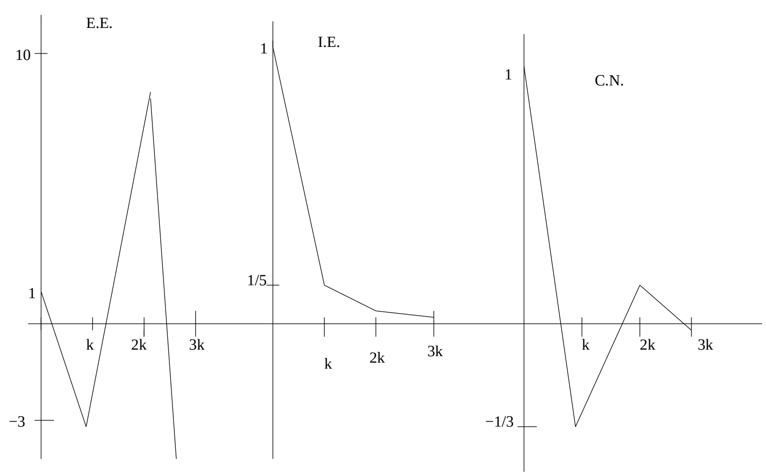
$$U(t) = U_{n-1}\frac{t_n - t}{t_n - t_{n-1}} + U_n\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \Longrightarrow a\int_{t_{n-1}}^{t_n} U(t) = a\frac{1}{2}kU_n - a\frac{1}{2}kU_{n-1}.$$

Insättning i (3) ger

$$U_n - U_{n-1} + a\frac{1}{2}kU_n - a\frac{1}{2}kU_{n-1} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} U_n = \frac{1-\frac{1}{2}\times 40\times(0.1)}{1+\frac{1}{2}\times 40\times(0.1)} U_{n-1} = -\frac{1}{3}U_{n-1}, \\ U_0 = 1. \end{cases}$$

Nedan är grafen i fallen dG0 som IE (Implicit Euler), och cG(1) som CN (Crank-Nicolson). Första bilden EE (Explicit Euler) *är extra* och visar det kraftigt oscillerande och divergenta fallet:

$$U_n - U_{n-1} + akU_{n-1} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} U_n = 1 - 40\times(0.1)U_{n-1} = -3U_{n-1}, \\ U_0 = 1. \end{cases}$$



5. Fourier cosinusserier för $f(x) = \sin(x),\ 0 < x < \pi/2$ ges av allmänna Fourier serie utveckling för en jämn funktion

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

där $2L = \pi$, alltså $L = \pi/2$, värför har vi

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{4}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}.$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx\, dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\Big[\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x\Big]\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{\cos(1+2n)x}{1+2n} - \frac{\cos(1-2n)x}{1-2n}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\Big] = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}.
\end{aligned}
$$

Alltså vi har

$$
f(x) = \sin x \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos(2nx).
$$

Parsevals relation:

$$
\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\, dx = \frac{2}{L}\int_0^L |f(x)|^2\, dx,
$$

ger att

$$
\frac{1}{2}\Big(\frac{4}{\pi}\Big)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(4n^2-1)^2} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = 1.
$$

Dvs

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(4n^2-1)^2} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}.
$$

6. Multiplicera elvationen med en test funktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = v(1) = 0\}$ och integrera över I. Genom partial integration och med hänsyn till randdata får vi följande *variationsproblem*: Finn $u \in H_0^1(I)$ så att

$$
\int_I (\varepsilon u'v' + uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{4}
$$

En motsvarade *Finitelement Metod* med $cG(1)$ formuleras som: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$
\int_I (\varepsilon U'v' + Uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I), \tag{5}
$$

där

$$
V_h^0 = \{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } I,\ v(0) = v(1) = 0\}.
$$

Låt nu $e = u - U$, då ger (4)-(5) att

$$
\int_I (\varepsilon e'v' + ev) = 0, \quad \forall v \in V_h^0, \qquad \text{(Galerkin Ortogonalitet)}. \tag{6}
$$

A priori feluppskattning: Genom att använda (6) får vi

$$
\begin{aligned}
\|e\|_E^2 &= \varepsilon\|e'\|_{L_2(I)}^2 + \|e\|_{L_2(I)}^2 = \int_I (\varepsilon e'e' + ee) = \int_I \Big(\varepsilon e'(u-U)' + e(u-U)\Big) \\
&= \{\pm v \text{ med } v \in V_h^0\} = \int_I \Big(\varepsilon e'(u-v+v-U)' + e(u-v+v-U)\Big)\, dx \\
&= \int_I \Big(\varepsilon e'(u-v)' + e(u-v)\Big)\, dx + \int_I \Big(\varepsilon e'(v-U)' + e(v-U)\Big)\, dx \\
&= \{\text{Eftersom } (v-U) \in V_h^0,\ (6) \Longrightarrow\} = \int_I \Big(\varepsilon e'(u-v)' + e(u-v)\Big)\, dx \\
&= \{\text{välj } v = \pi_h u\} = \int_I \Big(\varepsilon e'(u-\pi_h u)' + e(u-\pi_h u)\Big) \le \{C-S\} \\
&\le \varepsilon\|e'\|\|(u-\pi_h u)'\| + \|e\|\|u-\pi_h u\| \le C_i\Big(\varepsilon\|e'\|h\|u''\| + \|e\|h^2\|u''\|\Big) \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}\|e'\|^2 + C_i^2\frac{\varepsilon h^2}{2}\|u''\|^2 + \frac{1}{2}\|e\|^2 + C_i^2\frac{h^4}{2}\|u''\|^2.
\end{aligned}
$$

Vi flyttar e-termerna till VL, mutiplicerar resultat med 2 och får

$$
\|e\|_E^2 \le C_i^2 h^2(\varepsilon + h^2)\|u''\|^2, \qquad \Longrightarrow \qquad \|e\|_E \le C_i h\sqrt{\varepsilon + h^2}\|u''\|.
$$

7. Låt $S(x)$ satisfiera $-S''(x) = x$, $S(0) = 1$, $S'(L) = 0$. Man får $S(x) = \frac{L^2x}{2} - \frac{x^3}{6} + 1$. Sätt $v = u - S$. För v fås då

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, & & 0 < x < L, & t > 0, \\ v(0,t) = 0, & v_x(L,t) = 0, & & t > 0, \\ v(x,0) = \frac{x^3}{6} - \frac{L^2x}{2}, & v_t(x,0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Variabelseparation: $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ i de homogena ekvationerna ger $T(t)X"(x) = T''(T)X(x)$, dvs

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda \Longrightarrow \begin{cases} X'' = \lambda X; \\ X(0) = X'(L) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} T''(t) = \lambda T(t), \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

$\lambda = 0$ går ej: $X'' = 0X \Longleftrightarrow X(x) = Ax + B$ och $X(0) = X'(L) = 0 \Longleftrightarrow A = B = 0 \Longleftrightarrow X(x) \equiv 0$. Här egenvädresproblemet för X ger att endast $\lambda = -\mu^2 < 0$ leder till noll skild lösning. Alltså

$$X'' = -\mu^2 X; \quad X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x \quad \Longrightarrow \quad X'(x) = -A\mu\sin\mu x + B\mu\cos\mu x.$$

$$X(0) = 0 \Longleftrightarrow A = 0, \quad X'(L) = 0 \Longleftrightarrow B\mu\cos\mu L = 0 \Longleftrightarrow \mu = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{L}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dvs

$$\begin{cases} \lambda_n = -\mu_n^2 = -(n - \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{L^2}, & n = 1, 2, \ldots, \\ X_n(x) = \sin\mu_n x, \end{cases}$$

För T fås sedan

$$T_n(t) = C_n\cos(\mu_n t) + D_n\sin(\mu_n t).$$

Här $T_n'(0) = 0 \Longrightarrow D_n = 0$. Alltså $T_n(t) = C_n\cos(\mu_n t)$. Med superposition kan vi nu ansätta

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin(\mu_n x)\cos(\mu_n t) = \frac{x^3}{6} - \frac{L^2x}{2}.$$

För att bestämma C_n använder vi den inhomogena initiadata för v:

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin(\mu_n x) = \frac{x^3}{6} - \frac{L^2x}{2}.$$

Eftersom $\{X_n\}_1^\infty$ är ortogonalbas för $L_2(0,L)$ fås

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \Big(\frac{x^3}{6} - \frac{L^2x}{2}\Big)\sin(\mu_n x)\,dx = \ldots = -\frac{2}{L}\frac{(-1)^n}{\mu_n^4}.$$

Resultatet blir

$$u(x,t) = \frac{L^2x}{2} - \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\mu_n^4}\sin(\mu_n x)\cos(\mu_n t), \quad \text{där} \quad \mu_n = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{L}.$$

MA