Matematik Chalmers

Tentamen i TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2009–10–23; KL 14:00-18:00

Telefon: Adam Andersson: 0703-088304.
Hjälpmedel: Endast utdelad (vänd textlappen) tabell för Laplacetransformer. Kalkylator ej tillåten.
Uppgifterna 1 & 2 ger max 6p var, och 3-7 max 7 poäng var. Giltiga bonuspoäng tillkommer.
Betygsgränser: **3**: 20-29p, **4**: 30-39p och **5**: 40p- Lösningar/Granskning: Se Hemsidan, kursdagbok.

---

1. Använd Laplacetransformer och lös ekvationen: $y'(t)-2y(t)+\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 1+\sin(t), \quad y(0)=1.$

2. Beskriv den styckvis linjära, kontinuerliga, Galerkin approximationsproceduren för

$$\begin{cases} -u''(x)+2u'(x)=1, & 0<x<1, \\ u(0)=0, \quad u'(1)=1, \end{cases}$$

och bestäm dess ekvationsystem, $A\xi=b$, för partitionen : $x_0=0$, $x_1=1/3$, $x_2=2/3$, $x_3=1$.

3. a) Utveckla funktionen $f(x)=1+\sin(x),\ 0<x<\pi/2$ i, π-periodiska, Fourier cosinus-serier.

b) Använd svaret i a) för att bevisa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=1/2.$

4. a) Låt b vara en positiv konstant. Bevisa en *a priori* feluppskattning för cG(1) approximationen för följande konvektion-diffusion problem i energinormen $||w||_E := ||w'||_{L_2(I)}$,

$$-u''(x)+bu'(x)=f(x), \qquad x\in I=(0,1), \qquad u(0)=u(1)=0.$$

b) Bestäm b så att både konvektions och diffusionstermen ger samma bidrag i HL för *a priori* feluppskattningen. (Tag en likformig mesh med längden h. Sätt alla interpolationskonstanter =1).

5. Använd variabelseparationsmetoden och lös följande, inhomogena, värmeledningsekvation

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}-1, & 0<x<1, & t>0, \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & & t>0, \\ u(x,0)=\sin(\pi x), & 0<x<1. & \end{cases}$$

6. Betrakta randvärdesproblemet

$$-\varepsilon u''(x)+a(x)u'(x)+u(x)=f(x), \qquad x\in I=(0,1), \qquad u(0)=0, \quad u'(1)=0,$$

där ε är en positiv konstant och funktionen a uppfyller $a(x)\geq 0$, $a'(x)\leq 0$. Bevisa att

$$(i) \quad \sqrt{\varepsilon}||u'||\leq C||f|| \qquad (ii) \quad ||au'||\leq C||f|| \qquad \text{med} \quad ||w||=\Big(\int_0^1 w^2(x)\,dx\Big)^{1/2}.$$

7. Bevisa stabilitetsuppskattningarna för $\quad \dot{u}(t)+a(t)u(t)=f(t), \quad 0<t\leq T, \quad u(0)=u_0$:

$$(i) \quad a(t)\geq\alpha>0 \Longrightarrow |u(t)|\leq e^{-\alpha t}|u_0|+\frac{1}{\alpha}\Big(1-e^{-\alpha t}\Big)\max_{0\leq s\leq t}|f(s)|.$$

$$(ii) \quad a(t)\geq 0 \Longrightarrow |u(t)|\leq |u_0|+\int_0^t |f(s)|\,ds.$$

LYCKA TILL!
MA

$$\begin{aligned} \sin a\sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)] \\ \sin a\cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)] \\ \cos a\cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)] \end{aligned}$$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\frac{t}{2b} \sin bt$	$\frac{s}{(s^2 + b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2 + b^2)^2}$

TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2009–10–23; KL 14:00-18:00. Lösningar.

---

1. Laplacetransformering med $y(0) = 1$ ger

$$sY(s) - y(0) - 2Y(s) + \frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} \Longrightarrow$$

$$\Big(s^2 - 2s + 1\Big)\frac{Y(s)}{s} = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} \Longrightarrow (s-1)^2 Y(s) = s + 1 + \frac{s}{s^2+1} \Longrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2} + \frac{s}{(s-1)^2(s^2+1)} = \frac{s-1+2}{(s-1)^2} + \frac{s}{(s-1)^2(s^2+1)}$$

$$= \{(s-1)^2 - (s^2+1) = 2s\} = [PBU] = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s^2+1}\Big].$$

med $\{\frac{1}{s-1} \subset e^t \Longrightarrow -\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{s-1}\Big) \subset te^t\}$ får vi att $\quad y(t) = \Big(1 + \frac{5}{2}t\Big)e^t - \frac{1}{2}\sin(t).$

2. a) Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty, v(0) = 0\}$. Patialintegrera över $I = (0, 1)$:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - [u'(x)v(x)\,dx]_{x=0}^{x=1} + 2\int_0^1 u(x)'v(x)\,dx = \int_0^1 v(x)\,dx.$$

Använd randdata för att få *variationsformulering*: Finn $u \in H_0^1(I)$ så att

$$\text{(1)} \qquad \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + 2\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx = \int_0^1 v(x)\,dx + v(1)$$

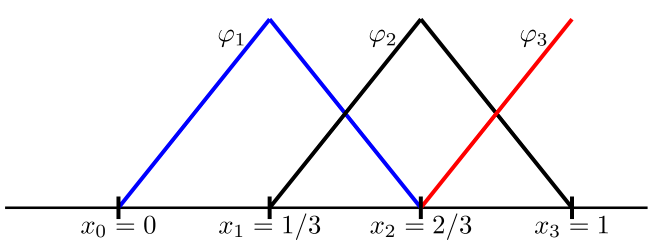
En *Finitelement Metod* med styckvis linjär approximation formuleras som: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$\text{(2)} \qquad \int_0^1 U'(x)v'(x)\,dx + 2\int_0^1 U'(x)v(x)\,dx = \int_0^1 v(x)\,dx + v(1), \quad \forall v \in V_h^0 \subset H^1(I),$$

där $\quad V_h^0 = \{v : v$ styckvis linjär och kontinuerlig i partitionen och med $v(0) = 0\}$.
För partitionen $\mathcal{T}_h$, och med givna $u(0) = 0$ med $u'(1) = 1$ har vi följande bas-funktioner:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & I_1 \\ 2-3x, & I_2 \\ 0, & I_3. \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & I_1 \\ 3x-1, & I_2 \\ 3-3x, & I_3 \end{cases} \qquad \varphi_3(x) = \begin{cases} 0, & I_1 \cup I_2 \\ 3x-2, & I_3 \end{cases}$$

$$I_1 := [0, 1/3] \qquad I_2 := [1/3, 2/3] \qquad I_3 := [2/3, 1].$$



I denna bas är $U(x) = \sum_{j=1}^3 \xi_j\varphi_j(x)$ och väljer vi $v(x) = \varphi_i(x),\ i = 1, 2, 3,$ då kan (2) skrivas som

$$\sum_{j=1}^{3} \xi_j \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + 2\sum_{j=1}^{2} \xi_j \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j'(x)\,dx = \int_0^1 \varphi_i(x)\,dx + v(1), \qquad i = 1, 2, 3,$$

eller som en linjär ekvationssystem enligt $A\xi = b, \quad A = (a_{ij})$, med

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + 2\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j'(x)\,dx, \qquad i,j = 1,2,3.$$

$$b = (b_i), \quad b_i = \int_0^1 \varphi_i(x)\,dx, +v(1) \qquad i,j = 0,1,2,3.$$

Då får vi ekvationssystemet

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Slutligen med $h = 1/3$ får vi att

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 7/6 \end{pmatrix}.$$

3. a) Allmänna formen av Fourier cosinusserie utveckling för en $2L$-periodisk funktion f är:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \qquad \text{där} \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx,$$

Med $\quad 2L = \pi$ är $L = \pi/2$ och

$$a_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(1+\sin x)\cos\frac{n\pi}{\pi/2}x\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1+\sin x)\cos 2nx\,dx.$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1+\sin x)\,dx = \frac{4}{\pi}\Big[x - \cos(x)\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2}+1\Big).$$

För $n \geq 1$ gäller

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos 2nx + \sin x\cos 2nx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\Big[\frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\Big(\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x\Big)\,dx\Big] \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{1}{1+2n}\cos(1+2n)x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} - \frac{1}{1-2n}\cos(1-2n)x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2}\Big] \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\Big] = \frac{-4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

Därför är

$$f(x) = 1 + \sin x = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2}+1\Big) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

b) $x = 0 \Longrightarrow 1 = 1 + \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = 1/2.$

4. Multiplicera elvationen med en test funktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = v(1) = 0\}$ och integrera över I. Genom partial integration och med hänsyn till randdata får vi följande *variationsproblem*: Finn $u \in H_0^1(I)$ så att

(3) $$\int_I (u'v' + bu'v) = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

En motsvarade *Finitelement Metod* med $cG(1)$ formuleras som: Finn $U \in V_h^0$ så att

(4) $$\int_I (U'v' + bU'v) = \int_I fv, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I),$$

där

$$V_h^0 = \{v : v \text{ är styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } I,\ v(0) = v(1) = 0\}.$$

Låt nu $e = u - U$, då ger (3)-(4) att

(5) $$\int_I (e'v' + be'v) = 0, \quad \forall v \in V_h^0, \qquad \text{(Galerkin Ortogonalitet)}.$$

Observera att p.g.a. $e(0) = e(1) = 0$, får vi också

(6) $$\int_I e'e = \frac{1}{2}\int_I \frac{d}{dx}(e^2) = \frac{1}{2}(e^2)|_0^1 \equiv 0.$$

A priori feluppskattning: Genom att använda (5) och (6) får vi

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 &= \|e'\|_{L_2(I)}^2 = \int_I e'e'\,dx = \int_I (e'e' + be'e) = \int_I \Big(e'(u-U)' + be'(u-U)\Big) \\
&= \{\pm v \text{ med } v \in V_h^0\} = \int_I \Big(e'(u-v+v-U)' + be'(u-v+v-U)\Big)\,dx \\
&= \int_I \Big(e'(u-v)' + be'(u-v)\Big)\,dx + \int_I \Big(e'(v-U)' + be'(v-U)\Big)\,dx \\
&= \{\text{Eftersom } (v-U) \in V_h^0,\ (5) \Longrightarrow\} = \int_I \Big(e'(u-v)' + be'(u-v)\Big)\,dx \\
&= \{\text{välj } v = \pi_h u\} = \int_I \Big(e'(u-\pi_h u)' + be'(u-\pi_h u)\Big) \le \{C-S\} \\
&\le \|(u-\pi_h u)'\|\|e'\| + b\|u-\pi_h u\|\|e'\| \le C_i\{\|hu''\| + b\|h^2u''\|\}\|e'\|.
\end{aligned}$$

Detta ger med h= konstant, $C_i = 1$ och $\|e\|_E = \|e'\|$ att

$$\|e\|_E \le (h + bh^2)\|u''\|.$$

b) Bidragen från konvektion och diffusions-termer är lika om $h \sim bh^2$, dvs om $b \sim 1/h$.

5. Ansätt $u(x,t) = v(x,t) + S(x)$ och sök homogen (DE)+ randdata för v:

$$\begin{array}{llcll}
u_t = u_{xx} - 1 & \Longrightarrow v_t = v_{xx} + S''(x) - 1 & \Longrightarrow & v_t = v_{xx} & S''(x) - 1 = 0 \\
u(0,t) = 0 & \Longrightarrow v(0,t) + S(0) = 0 & \Longrightarrow & v(0,t) = 0 & S(0) = 0 \\
u(1,t) = 0 & \Longrightarrow v(1,t) + S(1) = 0 & \Longrightarrow & v(1,t) = 0 & S(1) = 0 \\
u(x,0) = \sin \pi x & \Longrightarrow v(x,0) + S(x) = \sin \pi x & \Longrightarrow & v(x,0) = \sin \pi x - S(x) &
\end{array}$$

Från sista spalten (differentialekvationen för S) får vi att $S(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x-1)$.
För att bestämma $v(x,t)$ sätt $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$; insätning i differentialekvationen för v ger $X''T = XT'$ eller $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda$. Med homogem raddata är $\lambda < 0$. Sätt $\lambda = -\mu^2$. Detta ger

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, & \qquad T' = \lambda T. \\ X(0) = X(1) = 0. & \end{cases}$$

(Obs! $\lambda \ge 0$ är ej egenvärde ty, då för man p.g.a. $X(0) = X(1) = 0$, den triviala lösningen). Alltså

$$\lambda = -\mu^2 < 0 \Longrightarrow X(x) = A\cos \mu x + B \sin \mu x.$$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$ och $X(1) = 0 \Longrightarrow B\sin\mu = 0 \quad \{B \neq 0\} \quad \Longrightarrow \mu = n\pi$. Därmed

$$\lambda_n = -(n\pi)^2, \qquad X_n(x) = B_n \sin n\pi x, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

För T gäller då

$$T_n' = \lambda_n T_n \Longrightarrow T_n(t) = T(0)e^{-(n\pi)^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposition ger den allmänna lösningen

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

Ur bygynnelsedata:

$$v(x,0) = \sin \pi x + \frac{1}{2}x(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin n\pi x,$$

får vi att b_n är Fourier-sinus koefficienter för funktionen $\sin \pi x + \frac{1}{2}x(1-x)$ m.a.p. based $\{\sin n\pi x\}$ i intervallet $(0,1)$:

$$b_n = 2\int_0^1 \Big[\frac{1}{2}x(1-x)+\sin \pi x\Big] \sin n\pi x\, dx = \int_0^1 x(1-x) \sin n\pi x\, dx + 2\int_0^1 sin\pi x \sin n\pi x\, dx := I_1 + I_2$$

Vi har att

$$I_2 = 2\int_0^1 sin\pi x \sin n\pi x\, dx = \begin{cases} 2\times 1/2 = 1, & n=1 \\ 0 & n\neq 1. \end{cases}$$

För I_1 integralen har vi att

$$I_1 = \int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\, dx = \Big[x(1-x)\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (1-2x)\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\, dx\Big]$$

$$= \Big[(1-2x)\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -2\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Big]\, dx = -2\frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^3}\Big|_{x=0}^{x=1} = -2\frac{\cos(n\pi)-1}{(n\pi)^3} = -2\frac{(-1)^n-1}{(n\pi)^3}.$$

Dvs

$$b_1 = 1 + \frac{4}{\pi^3}, \qquad b_n = -2\frac{(-1)^n-1}{(n\pi)^3}, \quad n\geq 2.$$

Allså svaret är

$$v(x,t) = \Big(1+\frac{4}{\pi^3}\Big)e^{-\pi^2 t}\sin \pi x - \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^3}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

och

$$u(x,t) = v(x,t) + S(x) = \frac{1}{2}x(x-1) + \Big(1+\frac{4}{\pi^3}\Big)e^{-\pi^2 t}\sin \pi x - \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^3}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x.$$

Alternativt kan man skriva

$$v(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin \pi x - \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^3}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

och

$$u(x,t) = v(x,t) + S(x) = \frac{1}{2}x(x-1) + e^{-\pi^2 t}\sin \pi x - \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^3}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x.$$

6. Multiplicering med u ger

$$\varepsilon||u'||^2 + \int_0^1 \alpha u' u\, dx + ||u||^2 = (f,u) \leq ||f||||u|| \leq \frac{1}{2}||f||^2 + \frac{1}{2}||u||^2.$$

Här

$$\begin{aligned} \int_0^1 a u' u\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 a\frac{d}{dx}u^2\, dx \\ &= \frac{1}{2}a(1)u(1)^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 a' u^2\, dx \geq 0, \end{aligned} \tag{7}$$

värför

$$\varepsilon||u'||^2 + \frac{1}{2}||u||^2 \leq \frac{1}{2}||f||^2.$$

Detta bevisar att

$$\sqrt{\varepsilon}||u'|| \leq ||f||, \qquad ||u|| \leq ||f||. \tag{8}$$

Multiplicera ekvationen med au' and integrera över x:

$$-\varepsilon \int_0^1 u'' a u' \, dx + ||au'||^2 + \int_0^1 a u' u \, dx \leq \frac{1}{2}||f||^2 + \frac{1}{2}||au'||^2.$$

Alltså enligt (7)

$$\begin{aligned} ||au'||^2 &\leq ||f||^2 + \varepsilon \int_0^1 a \frac{d}{dx}(u')^2 \, dx \\ &= ||f||^2 - \varepsilon a(0) u'(0)^2 - \varepsilon \int_0^1 a'(u')^2 \, dx \\ &\leq ||f||^2 + ||a'||\varepsilon ||u'||^2 \leq ||f||^2 + C\varepsilon ||u'||^2. \end{aligned}$$

Genom att använda (8) får vi att

$$||au'|| \leq C||f||. \qquad (9)$$

Se *Föreläsningsanteckningar*.

MA