Matematik Chalmers

Tentamen i TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2008–10–24, kl 14:00–18:00.

Telefon: Jacob Sznajdman: 0762-721860
Hjälpmedel: Endast utdelad (vänd textlappen) tabell för Laplacetransformer. Kalkylator ej tillåten.

---

1. Använd Laplacetransformer och lös differentialekvation: $y''(t)+4y(t)=1,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.

2. $\Pi_1 f$ är linjära interpolanten av funktionen $f\in C^2(a,b)$ på intervallet (a,b). Visa att

$$||\Pi_1 f - f||_{L_\infty(a,b)} \le \frac{1}{8}(b-a)^2||f''||_{L_\infty(a,b)}. \qquad ||g||_{L_\infty(a,b)} = \max_{a\le x\le b}|g(x)|.$$

3. $\mathcal{T}_h: x_0=0,\ x_1=1/2,\ x_2=1$ är en partition av intervallet [0,1]. Sätt upp ekvationsystemet $A\xi=b$ (bestäm A och b) för den styckvis linjära Galerkin approximationen på $\mathcal{T}_h$ för problemet:

$$-u''+12u=4, \qquad u'(0)=0, \quad u'(1)=1.$$

4. a) Bestäm Fourierserie utvecklingen av den 2π-periodiska funktionen

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

b) Använd Fourierserien och beräkna summan:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

5. Betrakta differentialekvationen

$$-\varepsilon u''-2u'+3u=f, \quad x\in(0,1), \qquad u'(0)=u(1)=0,$$

där $\varepsilon>0$ och $f\in L_2(I)$, $I:=(0,1)$. Visa att

$$|u(0)|\le ||f||, \qquad \text{och} \qquad ||\varepsilon u''||\le||f||. \qquad ||w||^2:=\int_0^1|w(x)|^2\,dx.$$

6. Använd variabelseparationsmetoden och lös den inhomogena värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=\sin\pi x, & 0<x<1, \quad t>0,\\ u(0,t)=1, \quad u(1,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=x, & 0<x<1.\end{cases}$$

7. Betrakta följande, 1-dimensionell, vågekvation:

$$\begin{cases} \ddot u-u''=0, & 0<x<1, \quad t>0,\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & \\ u(x,0)=u_0(x), & \dot u(x,0)=v_0(x).\end{cases}$$

Visa att den totala energin är konstant (konservering av energin). Dvs, visa att

$$\frac{1}{2}||\dot u||^2+\frac{1}{2}||u'||^2=\text{konstant}.$$

MA

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$$
$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\frac{t}{2b}\sin bt$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$

TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2008–10–24, kl 14:00–18:00.. Lösningar.

---

1. Laplacetransformering ger

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 1/s \Longrightarrow s^2Y(s) + 4Y(s) = s + 1/s \Longrightarrow$$
$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s(s^2+4)} = [PBU] = \frac{s}{s^2+4} + \frac{A}{s} + \frac{BS+C}{s^2+4}.$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} A+B = & 0 \\ C = & 0 \\ 4A = & 1 \end{cases} \Longrightarrow A = 1/4, \quad B = -1/4, \quad C = 0.$$

Alltså

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\Big).$$

Invers transformering ger att

$$y(t) = \cos 2t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2t.$$

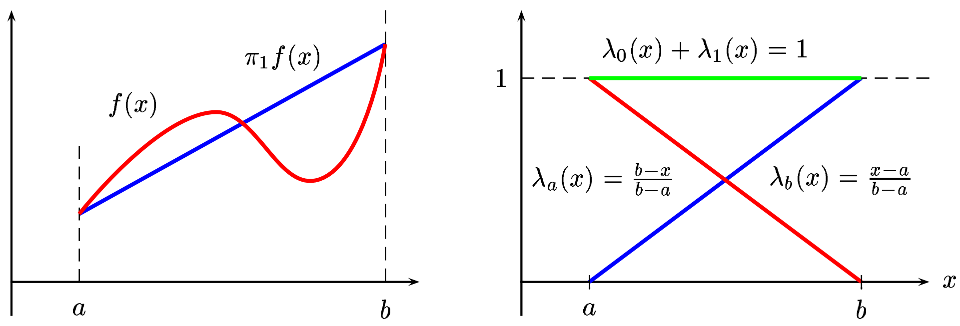
2. Varje linjär funktion på $[a,b]$ kan skrivas som en linjär komination av de almänna basfuktioner:

(1) $$\lambda_a(x) = \frac{x-b}{a-b} \quad \text{och} \quad \lambda_b(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Vi skall använda följane egenskaper hos $\lambda_a(x)$ och $\lambda_b(x)$:

(2) $$\lambda_a(x) + \lambda_b(x) = 1 \qquad \text{och} \qquad a\lambda_a(x) + b\lambda_b(x) = x.$$

$\pi_1 f(x)$ är en linjär funktion på $[a,b]$ och därför kan skrivas som



FIGUR 1. Linear Lagrange basfunktioner på $[a,b]$.

(3) $$\pi_1 f(x) = f(a)\lambda_a(x) + f(b)\lambda_b(x).$$

Vi utgår från Taylorutvecklingen av $f(a)$ och $f(b)$ kring x:

(4) $$\begin{aligned} f(a) &= f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{1}{2}(a-x)^2 f''(\eta_a), \quad \eta_a \in [a,x] \\ f(b) &= f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{1}{2}(b-x)^2 f''(\eta_b), \quad \eta_b \in [x,b]. \end{aligned}$$

Insättning av $f(a)$ och $f(b)$ från (4) in i (3), ger att

$$\begin{aligned}\pi_1 f(x) =&[f(x)+(a-x)f'(x)+\frac{1}{2}(a-x)^2 f''(\eta_a)]\lambda_a(x)+\\ &+[f(x)+(b-x)f'(x)+\frac{1}{2}(b-x)^2 f''(\eta_b)]\lambda_b(x).\end{aligned}$$

Genom att utnyttja egenskar i (2) kan vi skriva att

$$\begin{aligned}\pi_1 f(x) &= f(x)[\lambda_a(x)+\lambda_b(x)]+f'(x)[(a-x)\lambda_a(x)+(b-x)\lambda_b(x)]+\\ &+\frac{1}{2}(a-x)^2 f''(\eta_a)\lambda_a(x)+\frac{1}{2}(b-x)^2 f''(\eta_b)\lambda_b(x)=\\ &= f(x)+\frac{1}{2}(a-x)^2 f''(\eta_a)\lambda_a(x)+\frac{1}{2}(b-x)^2 f''(\eta_b)\lambda_b(x).\end{aligned}$$

Alltså

(5)
$$\begin{aligned}|\pi_1 f(x)-f(x)| &= \Big|\frac{1}{2}(a-x)^2 f''(\eta_a)\lambda_a(x)+\frac{1}{2}(b-x)^2 f''(\eta_b)\lambda_b(x)\Big|\\ &\le \frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\Big|(a-x)^2\frac{b-x}{b-a}+(b-x)^2\frac{x-a}{b-a}\Big|\\ &\le \frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\Big|(a-x)(b-x)\frac{(a-x)-(b-x)}{b-a}\Big|\\ &= \frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\max_{a\le x\le b}(x-a)(b-x).\end{aligned}$$

Observera att i sista led har vi använd $a\le x$. Låt $g(x)=(x-a)(b-x)$. Vi skall ersätta $(x-a)(b-x)$ i högerledent med dess maximum. Vi har att

(6)
$$\begin{aligned}&g(x)=-x^2+(a+b)x-ab \Longrightarrow g'(x)=-2x+(a+b) \quad g'(x)=0\Longrightarrow x=(a+b)/2\\ &\Longrightarrow \max g(x)=g((a+b)/2)=-\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{(a+b)^2}{2}-ab=\frac{(b-a)^2}{4}.\end{aligned}$$

Insättning av (6) i (5) ger att

$$||\pi_1 f-f||_{L_\infty(a,b)}\le\frac{1}{8}(b-a)^2||f''||_{L_\infty(a,b)}.$$

3. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v\in H^1=\{v:||v||+||v'||<\infty\}$, patialintegrera över $I=(0,1)$:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx-[u'(x)v(x)\,dx]_{x=0}^{x=1}+12\int_0^1 u(x)v(x)\,dx=4\int_0^1 v(x)\,dx.$$

använd randdata för att få *variationsformulering*: Finn $u\in H^1(I)$ så att

(7)
$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx+12\int_0^1 xu(x)v(x)\,dx=4\int_0^1 v(x)\,dx+v(1)$$

En *Finitelement Metod* med styckis linjär approximation formuleras som: Finn $U\in V_h$ så att

(8)
$$\int_0^1 xU'(x)v'(x)\,dx+12\int_0^1 U(x)v(x)\,dx=4\int_0^1 v(x)\,dx++v(1),\quad \forall v\in V_h\subset H^1(I),$$

där

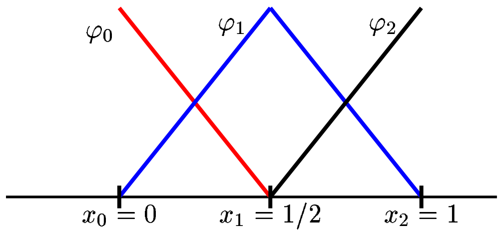
$$V_h=\{v:v \text{ styckvis linjär och kontinuerlig i partitionen}\mathcal{T}_h\}.$$

För partitionen $\mathcal{T}_h$, och med $u'(0)=0,\ u'(1)=1$ har vi följande bas-funktioner:

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}1-2x, & 0\le x\le 1/2\\ 0, & 1/2\le x\le 1.\end{cases}\qquad \varphi_1(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1/2\\ 2-2x, & 1/2\le x\le 1.\end{cases}$$

och

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1/2\\ 2x-1, & 1/2\le x\le 1.\end{cases}$$



I denna bas kan vi skriva $U(x) = \sum_{j=0}^{2} \xi_j \varphi_j(x)$ och ersätta i (8) och välja $v(x) = \varphi_i(x), \ i = 0, 1, 2$. Då kan (8) skrivas om som

$$\sum_{j=0}^{2} \xi_j \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + 12\sum_{j=0}^{2} \xi_j \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 4\int_0^1 \varphi_i(x)\,dx + \varphi_i(1), \qquad i = 0, 1, 2,$$

eller som en linjär ekvationssystem enligt $A\xi = b, \quad A = (a_{ij})$, med

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + 12\sum_{j=0}^{2} \xi_j \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx, \qquad i, j = 0, 1, 2.$$

$$b = (b_i), \quad b_i = 4\int_0^1 \varphi_i(x)\,dx + \varphi_i(1), \qquad i, j = 0, 1, 2.$$

Observera att Neumann-randdata: $u'(0) = 0$ och $u'(1) = 1$, innebär *halvbas-funktioner* för $x = 0$ och $x = 1$ och därmed, gemförd med standard fall, halveras första och sista diagonalelementen i både styvhetsmatrisen S och massmatrisen M. Då får vi ekvationssystemet

$$h\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + 12\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Slutligen med $h = 1/2$ får vi att

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} + 12\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. a) Allmänna formen av Fourierserie utveckling för en 2π-periodisk funktion f är:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big)$$

där

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad \text{och} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Vi har att

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

För $n \geq 1$ gäller

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_0^{\pi} x\cos\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[x\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}[cos(n\pi) - 1] = \frac{1}{\pi}\begin{cases} \frac{-2}{(2k-1)^2}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[x\frac{-\cos(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\pi\frac{-\cos(n\pi)}{n}\Big] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Därför är

$$f(x) \approx \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx). \tag{9}$$

b) Genom att sätta $x = \pi/2$ (obs! $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = \pi/2$) i (9) får vi

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{\pi}{4} + \Big(1 + \frac{1}{3}\sin(3\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5}\sin(5\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{7}\sin(7\frac{\pi}{2}) + \dots\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Alltså vi får

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

5. Vi multiplicerar ekvationen: $-\varepsilon u'' - 2u' + 3u = f$ med u och integrerar över $I = (0,1)$. Med partiell integration och användning av data: $u'(0) = u(1) = 0$ räknar vi fram varje term i VL:

$$-\int_0^1 \varepsilon u'' u\,dx = \int_0^1 \varepsilon (u')^2\,dx, \quad -2\int_0^1 u'u\,dx = -2\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(u^2)\,dx = -u^2(1) + u^2(0) = u^2(0),$$

och

$$3\int_0^1 uu\,dx = 3\|u\|^2.$$

Alltså vi har att

$$\int_0^1 \varepsilon(u')^2\,dx + u^2(0) + 3\|u\|^2 = \int_0^1 fu\,dx \le \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2$$

Genom att jämföra VL och HL vi får genast att t.ex.

$$|u(0)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\| \le \|f\|.$$

På samma sätt, multiplicerar vi elvationen med $-\varepsilon u''$ och integrerar över $I = (0,1)$ för att få

$$\int_0^1 (\varepsilon u'')^2 + 2\int_0^1 u'\varepsilon u''\,dx - 3\int_0^1 u\varepsilon u''\,dx = -\int_0^1 f\varepsilon u''\,dx. \tag{10}$$

Igen med partiell integration och användning av data har vi att

$$2\int_0^1 u'u''\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Big(u'\Big)^2\,dx = u'(1)^2 - u'(0)^2 = u'(1)^2,$$

och

$$\int_0^1 uu''\,dx = -\int_0^1 (u')^2\,dx + \Big[u(x)u'(x)\Big]_{x=0}^1 = -\int_0^1 (u')^2\,dx.$$

Därför (**??**) kan uppskattas som

$$\|\varepsilon u''\|^2 + \varepsilon u'(1)^2 + 3\int_0^1 \varepsilon(u')^2\,dx \le \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|\varepsilon u''\|^2$$

eller

$$\frac{1}{2}\|\varepsilon u''\|^2 + \varepsilon u'(1)^2 + 3\int_0^1 \varepsilon(u')^2\,dx \le \frac{1}{2}\|f\|^2.$$

Detta ger bl.a.

$$\|\varepsilon u''\| \le \|f\|.$$

6. Bestäm $S(x)$, så att $-S''(x) = \sin(\pi x)$, $S(0) = 1$, $S(1) = 0$. Man får $S(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) - x + 1$.
Sätt $v = u - S$. För v fås

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = 2x - 1 - \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Variabelseparation: $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ i de homogena ekvationerna ger

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \qquad T' = -\lambda T.$$

Egenvärdesproblemet för X ger $\lambda = \lambda_n = (n\pi)^2$, $X_n(x) = \sin n\pi x$, $n \geq 1$.
Ekvationen för T ger $T_n(t) = C_n e^{-(n\pi)^2 t}$. Ansätt

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x, \quad \text{där} \quad v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x = 2x - 1 - \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x).$$

Härav fås

$$C_n = \frac{1}{1/2}\int_0^1 (2x - 1 - \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x)\sin n\pi x\, dx,$$

där

$$\int_0^1 (2x-1)\sin n\pi x\, dx = \ldots = -\frac{1}{n\pi}[1 + (-1)^n], \qquad \int_0^1 \sin \pi x \sin n\pi x\, dx = \begin{cases} 0, & n > 1, \\ \frac{1}{2}, & n = 1. \end{cases}$$

Alltså är $C_1 = -\frac{1}{\pi^2}$, $\quad C_{2k-1} = 0$, $k \geq 1$, $\quad C_{2k} = -\frac{2}{k\pi}$, $k \geq 1$.

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\left(1 - e^{-\pi^2 t}\right)\sin \pi x - x + 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-4\pi^2 k^2 t} \sin 2k\pi x.$$

7 Se *Föreläsningsanteckningar*.

MA