Matematik Chalmers

Tentamen i TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2007–10–22

Telefon: Peter Lindroth: 0762-721860
Hjälpmedel: Endast utdelad tabell för Laplacetransformer. Kalkylator ej tillåten.

---

1. Visa följande linjära interpolationsfeluppskattning för en funktion $f \in C^2(0,1)$,

$$||\pi_1 f - f||_{L_\infty(0,1)} \leq \frac{1}{8} \max_{0\leq\xi\leq 1} |f''(\xi)|.$$

2. Sök med Laplacetransformation en funktion $y(t)$ som satisfierar ekvationen

$$y'(t) + 3y(t) + 2\int_0^t y(\tau)\, d\tau = e^{-t} - \theta(t-1), \qquad y(0) = 0.$$

3. Låt $\varepsilon > 0$, $||v||^2 := ||v||^2_{L_2(I)} = \int_0^1 |v(x)|^2 dx$. Betrakta konvektion-diffusion ekvationen

$$-\varepsilon u''(x) + xu'(x) = f(x), \quad x \in I := (0,1); \qquad u(0) = u'(1) = 0.$$

Visa följande L_2-stabilitetsolikhet: $\quad \varepsilon^2||u''||^2 + \varepsilon||u'||^2 \leq ||f||^2.$

4. a) Beräkna Fourier sinus-serie för funktionen $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x < \pi. \end{cases}$

b) Använd resultatet i a) och beräkna summan av serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

5. Låt $\mathcal{T}_h$: $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$ och $a(x) = x_i$ för $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,2,3$. Beräkna $cG(1)$ lösningen (med $\mathcal{T}_h$ och $a(x)$ som ovan) för den stationära värmeledningsekvationen

$$-(a(x)u'(x))' = 0, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = 1, \quad a(1)u'(1) = 6.$$

6. a) Använd variabelseparationsmetoden och lös ekvationen

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & & t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x), & u_t(x,0) = \sin(7\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

b Använd resultatet i a) för att beräkna summan av serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.

7. Betrakta följande ODE: $\quad \dot{u}(t) + a(t)u(t) = f(t), \quad 0 < t \leq T, \qquad u(0) = u_0.$
Visa följande stabilitetsuppskattningar:

$$(i) \quad a(t) \geq \alpha > 0 \Longrightarrow |u(t)| \leq e^{-\alpha t}|u_0| + \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \max_{0\leq s\leq t} |f(s)|.$$

$$(ii) \quad a(t) \geq 0 \Longrightarrow |u(t)| \leq |u_0| + \int_0^t |f(s)|\, ds.$$

8. Antag f är 2π-periodisk kontinuerlig, f' är styckvis kontinuerlig. Visa att om a_n, b_n, C_n är $\mathcal{F}$-koeff. för f, och a_n', b_n' och C_n' $\mathcal{F}$-koeff. för f', då är $\quad a_n' = nb_n$, $\quad b_n' = -na_n$, och $\quad C_n' = inC_n$.

MA

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\frac{t}{2b}\sin bt$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$

TMA682 Tillämpad matematik K2/Bt2, 2007–10–22. Lösningar.

---

1. Enligt Lagrange interpolationssats har vi att

$$||f - \pi_1 f||_{L_\infty(0,1)} \le \frac{1}{2}(x-0)\cdot(1-x)\max_{x\in[0,1]}|f''|.$$

Vidare gäller att $g(x) = x(1-x)$ har maximum då $g'(x) = 0$, dvs då $1\cdot(1-x) + x\cdot(-1) = 0$, eller för $x = 1/2$. Alltså är $\max_{x\in[0,1]}[x(1-x)] = \max_{x\in[0,1]} g(x) = 1/2(1-1/2) = 1/4$. Därmed

$$||f - \pi_1 f||_{L_\infty(0,1)} \le \frac{1}{8}||f||_{L_\infty(0,1)}.$$

2. Laplacetransformering av ekvationen ger med $y(0) = 0$ att

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-s}}{s} \quad\Longrightarrow\quad \frac{s^2+3s+2}{s}Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-s}}{s}.$$

Alltså är

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} - \frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)} := I - e^{-s}II.$$

Vi anväder partialbråksuppdelning och skriver

$$I = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2}.$$

och därmed, genom identifiering av koefficienter, får ekvationssystemet:

$$\begin{cases} A \quad\quad\; +C \;= 0 & \text{koeff. } s^2 \\ 3A \;+B \;+2C \;= 1 & \text{koeff. } s^1 \\ 2A \;+2B \;+C \;= 0 & \text{koeff. } s^0 \end{cases} \Longrightarrow A = 2,\;\; B = -1,\;\; C = -2.$$

Vidare är

$$II = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Värför är

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+2} - e^{-s}\frac{1}{s+1} + e^{-s}\frac{1}{s+2}.$$

Eftersom $-\frac{1}{(s+1)^2} = \frac{d}{ds}\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}^{-1}[-te^{-t}]$, får vi

$$y(t) = 2e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-2t} - e^{-(t-1)}\theta(t-1) + e^{-2(t-1)}\theta(t-1).$$

3. Multiplicera ekvationen med $-\varepsilon u''$ och integrera över $I = (0,1)$:

$$\text{(1)} \qquad \int_0^1 (-\varepsilon u'')(-\varepsilon u'')\,dx + \int_0^1 (-\varepsilon u'')xu'\,dx = \int_0^1 (-\varepsilon u'')f\,dx.$$

M.h.a. partial integration får vi att

$$\int_0^1 (-\varepsilon u'')xu'\,dx = \varepsilon\Big(\int_0^1 (xu'u'\,dx - [xu'(x)u'(x)]_0^1\Big) = \varepsilon\Big(\int_0^1 (u')^2\,dx + \int_0^1 xu''u'\,dx\Big),$$

dvs

$$-\varepsilon\int_0^1 xu''u'\,dx = \frac{1}{2}\varepsilon||u'||^2.$$

Insättning i (1) och Cauchy-Schwarz olikhet ger

$$||\varepsilon u''||^2 + \frac{1}{2}\varepsilon||u'||^2 \le \frac{1}{2}||f||^2 + \frac{1}{2}||\varepsilon u''||^2 \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon^2||u''||^2 + \varepsilon||u'||^2 \le ||f||^2.$$

4. a) För utveckling av $f(x)$ i sinusserie definierar vi $f(x)$ även för $x \leq 0$ så att $f(x)$ blir en udda funktion. Vi har då $2L = 2\pi, (L = \pi)$ och

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

där,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx\Big] = \{nx = y\}\\
&= \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{n\pi/2} y\sin y\,dy + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\pi\sin nx\,dx - \frac{2}{\pi n^2}\int_{n\pi/2}^{n\pi} y\sin y\,dy\\
&= \frac{2}{\pi n^2}\Big[\sin y - y\cos y\Big]_0^{n\pi/2} - \frac{2}{n}\Big[\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\Big] - \frac{2}{\pi n^2}\Big[\sin y - y\cos y\Big]_{n\pi/2}^{n\pi}\\
&= \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k\\ \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}, & n = 2k+1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Observera att den expandirade 2π-periodiska funktionen $f(x)$ är kontinuerlig. Därför

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}\sin(2k+1)x.$$

b) Eftersom $a_n = 0$ för $n \geq 0$. Parsevals relation ger

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16(-1)^{2k}}{(2k+1)^4\pi^2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx \ = \{f(x)\cdot f(x) \text{ är jämn}\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/2} x^2\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)^2\,dx\Big] = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\Big[\frac{(\pi - x)^3}{-3}\Big]_{\pi/2}^{\pi}\\
&= \frac{2\pi^2}{24} + \frac{2\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.
\end{aligned}$$

5. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v'|| < \infty,\ v(0) = 0\}$, patialintegrera över I:

$$-\int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)\,dx + [a(x)u'(x)v(x)]_{x=0}^{x=1} = 0.$$

använd randdata för att få *variationsformulering*: Finn $u \in H_0^1(I)$ så att

$$\int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)\,dx = a(1)u'(1)v(1) = 6v(1). \tag{2}$$

En *Finitelement Metod* med $cG(1)$ formuleras som: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$\int_0^1 a(x)U'(x)v'(x)\,dx = 6v(1). \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I), \tag{3}$$

där

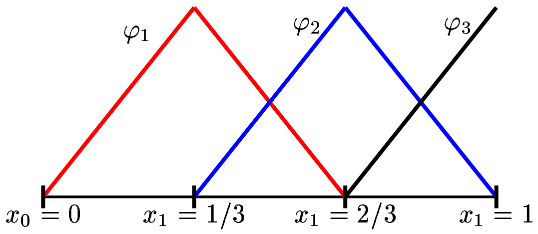
$$V_h^0 = \{v : v \text{ styckvis linjär och kontinuerlig i partitionen} \mathcal{T}_h \text{ med } v(0) = 0\}.$$

För partitionen $\mathcal{T}_h$, och med $u(0) = 0,\ a(1)u'(1) = 6$ har vi följande bas-funktioner:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 1/3\\ -3x + 2, & 1/3 \leq x \leq 2/3\\ 0, & 2/3 \leq x \leq 1\end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/3\\ 3x - 1, & 1/3 \leq x \leq 2/3\\ -3x + 3, & 2/3 \leq x \leq 1,\end{cases}$$

och

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/3 \\ 0, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ 3x-2, & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$



I denna bas kan vi skriva $U(x) = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \varphi_j(x)$ och ersätta i (3) och välja $v(x) = \varphi_i(x),\ i = 1,2,3.$ Då kan (3) skrivas om som

$$\sum_{j=1}^{3} \xi_j \int_0^1 a(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx = 6\varphi_i(1), \qquad i = 1,2,3,$$

eller som en linjär ekvationssystem enligt

$$A\xi = b, \quad A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \int_0^1 a(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx, \qquad b = (b_i), \quad b_i = 6\varphi_i(1), \quad i,j = 1,2,3.$$

Observera att

$$a(x) = \begin{cases} 1/3, & 0 \le x \le 1/3 \\ 2/3, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ 1, & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

Vi räknar elemten i matrisen A:

$$a_{11} = \int_0^1 a(x)\varphi_1'(x)\varphi_1'(x)\,dx = \int_0^{1/3} \frac{1}{3}(3)(3)\,dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{3}(-3)(-3)\,dx = 1 + 2 = 3.$$

$$a_{22} = \int_0^1 a(x)\varphi_2'(x)\varphi_2'(x)\,dx = \int_{1/3}^{2/3} \frac{2}{3}(3)(3)\,dx + \int_{2/3}^{1} 1\cdot(-3)(-3)\,dx = 2 + 3 = 5.$$

$$a_{33} = \int_0^1 a(x)\varphi_3'(x)\varphi_3'(x)\,dx = \int_{2/3}^{1} 1\cdot(3)(3)\,dx = 3.$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_{1/3}^{2/3} \frac{2}{3}(3)(-3)\,dx = -2. \qquad a_{13} = a_{31} = \int_{2/3}^{1} 1\cdot(3)(-3)\,dx = -3.$$

Då får vi ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \begin{cases} \xi & = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T = (6, 9, 11)^T. \\ U & = (1, \xi_1, \xi_2, \xi_3)^T = (1, 6, 9, 11)^T. \end{cases}$$

6. a) Låt $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. PDE:n kan nu skrivas som p $T''(t)X(x) = T(t)X''(x)$, vilket ger

$$\text{(4)} \qquad \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda. \quad \text{eller} \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) & = 0 \\ X''(x) - \lambda X(x) & = 0 \end{cases}$$

Med Dirichlet randdata har vi att $\lambda < 0$ och karakteristiska ekvationen för X är $r^2 = \lambda$, med rötterna $r = \pm i\sqrt{-\lambda}$. Alltså kan vi skriva

$$\text{(5)} \qquad T(t) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,t + B\sin\sqrt{-\lambda}\,t, \qquad X(x) = C\cos\sqrt{-\lambda}\,x + D\sin\sqrt{-\lambda}\,x.$$

$$X(0) = 0 \Longrightarrow C = 0, \qquad \Longrightarrow \quad X(x) = D\sin\sqrt{-\lambda}\,x.$$

$$X(1) = 0 \Longrightarrow (D \neq 0) \qquad \Longrightarrow \quad \sin\sqrt{-\lambda} = 0 \Longrightarrow \sqrt{-\lambda} = n\pi, \quad \lambda = -n^2\pi^2, \quad n = 1,2,\ldots,$$

Därmed alla funktioner

$$u_n(x,t) = \sin n\pi x[A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t], \quad n = 1, 2, \dots,$$

med A och B konstanter satisfierar differentialekvationen och randandvillkoren. Superposition ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x[A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t]. \tag{6}$$

Här

$$u(x,0) = x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x \quad \Longrightarrow \quad A_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\, dx.$$

Genom upprepade partial integration får vi

$$\begin{aligned} A_n &= 2\Big[x(1-x)\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1 - 2\int_0^1 (1-2x)\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\, dx \\ &= -2\Big[(1-2x)\frac{-\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 -2\frac{-\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\, dx \\ &= -4\Big[\frac{\cos n\pi x}{n^3\pi^3}\Big]_0^1 = \frac{4}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{8}{(2k+1)^3\pi^3}, & n = 2k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vidare genom att derivera (6) m.a.p. t och evaluera derivatan i $t = 0$ har vi att

$$u_t(x,0) = \sin 7\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sin n\pi x. \tag{7}$$

Identifering av koefficienter i (7) ger

$$B_n = 0 \quad \text{för } n \neq 7, \qquad \text{och } B_7 = \frac{1}{7\pi}.$$

Insättning av A_n och B_n i (6) ger

$$u(x,t) = \frac{1}{7\pi}\sin 7\pi x \sin 7\pi t + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^3\pi^3}\sin[(2k+1)\pi x]\cos[(2k+1)\pi t]. \tag{8}$$

b) Från (8) får vi

$$u(x,0) = x(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^3\pi^3}\sin(2k+1)\pi x. \tag{9}$$

Med $x = 1/2$, (9) ger

$$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^3\pi^3}\sin(2k+1)\pi\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^3\pi^3} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

7 och **8** Se *Föreläsningsanteckningar.*

MA